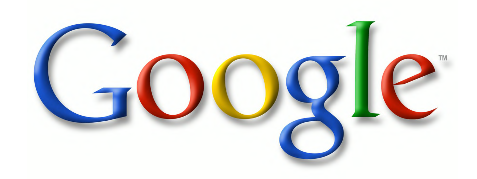






NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

DEUXIÈME SÉRIE.

1877.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS.
Quai des Augustins, 55.

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

JOURNAL DES CANDIDATS
AUX ÉCOLES POLYTECHNIQUE ET NORMALE,

RÉDIGÉ

PAR MM. GERONO,
PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES,

ET

CH. BRISSE,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
AGRÉGÉ DE L'UNIVERSITÉ.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME SEIZIÈME.

PUBLICATION FONDÉE EN 1842 PAR MM. GERONO ET TERQUEM,
ET CONTINUÉE PAR MM. GERONO, PROUHET ET BOURGET

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, n° 55.

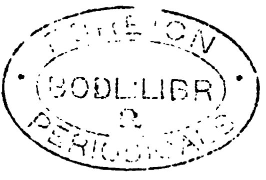
1877.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

THÉORIE DES INDICES;



Par M. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]

82. D'après la relation (c) du n° 65, les points d, d' étant les sommets des deux trièdres correspondants ABC, A'B'C',

$$\frac{I_{AA'}}{\sin\lambda A \sin\lambda' A'} = -\frac{I_{dd'}}{\pi^2 I_{\lambda\lambda'}},$$

de sorte que la relation à trois termes du n° 56 devient

$$I_{EE'} = -\frac{I_{dd'}}{\pi^2}\sum\frac{\sin\lambda E.\sin\lambda' E'}{I_{\lambda\lambda'}}.$$

Menons par le point d trois plans rectangulaires E, F, G, et par le point d' trois plans E', F', G' parallèles aux premiers. Si l'on applique aux trois systèmes EE', FF', GG' la relation précédente, et si l'on observe que, par le théorème précédent,

$$I_{EE'} + I_{FF'} + I_{GG'} = \frac{P_o - S_1^2}{\pi^2},$$

on a celui-ci :

Étant donnés deux trièdres correspondants $\lambda\mu\nu$,

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481, 529.

$\lambda'\mu'\nu'$ par rapport à la surface S et ayant pour sommets les points d, d', on a la relation

$$\frac{\cos\lambda\lambda'}{I_{\lambda\lambda'}} + \frac{\cos\mu\mu'}{I_{\mu\mu'}} + \frac{\cos\nu\nu'}{I_{\nu\nu'}} = \frac{S_1^2 - P_0}{I_{dd'}},$$

dans laquelle S_1^2 indique la somme des carrés des demi-axes de la surface, P_0 la puissance de son centre par rapport à la sphère qui a pour diamètre dd'.

83. *On donne une surface du second degré S et deux points d et d'; par le point d on mène trois axes rectangulaires λ, μ, ν, et par le point d' trois axes λ', μ', ν' parallèles au premier, la somme*

$$I_{\lambda\lambda'} + I_{\mu\mu'} + I_{\nu\nu'}$$

est constante quelle que soit la direction des axes. La constante a pour valeur

$$\frac{I_{dd'}}{S^2} - \frac{1}{P},$$

P désignant la puissance du centre de la surface par rapport à la sphère adjointe au système des plans polaires des points d et d' relative à ce centre, $\frac{1}{S^2}$ la somme des carrés des valeurs inverses des demi-axes de la surface S.

Imaginons la sphère S′ de rayon r qui a pour centre le point d; les trièdres $\lambda\mu\nu$, $\lambda'\mu'\nu'$ sont correspondants par rapport à cette sphère. On a donc, d'après (69), $\frac{1}{S^2}$ étant la somme des valeurs inverses des carrés des demi-axes de S,

$$\frac{I_{\lambda\lambda'}}{I'_{\lambda\lambda'}} + \frac{I_{\mu\mu'}}{I'_{\mu\mu'}} + \frac{I_{\nu\nu'}}{I'_{\nu\nu'}} = \frac{I_{dd'}}{I'_{dd'}}\left(\frac{r^2}{S^2} - I_d - \frac{r^6}{\pi^2}\,\frac{I'_{FF'}}{I_{FF'}}\right),$$

en désignant par F et F′ les plans polaires des points d' et d par rapport à la surface S. Or

$$I'_{\lambda\lambda'} = I'_{\mu\mu'} = I'_{\nu\nu'} = -\frac{1}{r^2}, \quad I'_{dd'} = -1;$$

il en résulte

$$\sum I_{\lambda\lambda'} = I_{dd'}\left(\frac{1}{S^2} - \frac{I_d}{r^2} - \frac{r^4}{\pi^2}\frac{I'_{FF'}}{I_{FF'}}\right);$$

mais, f étant le pôle du plan F′ par rapport à la sphère, et o le centre de S,

$$r^4 I'_{FF'} = (d, F')(f, F), \quad \pi^2 I_{FF'} = (o, F)(d', F'),$$

$$I_{dd'} = -\frac{(d', F')}{(o, F')},$$

d'où

$$\frac{r^4 I'_{FF'} I_{dd'}}{\pi^2 I_{FF'}} = -\frac{(d, F')(f, F)}{(o, F)(o, F')}.$$

Nous avons aussi

$$I_{dd'} = -\frac{(d, F)}{(o, F)}, \quad I_d = -\frac{(d, F')}{(o, F')},$$

d'où

$$I_{dd'} I_d = \frac{(d, F)(d, F')}{(o, F)(o, F')},$$

et par conséquent

$$\sum I_{\lambda\lambda'} = \frac{I_{dd'}}{S^2} - \frac{(d, F')}{r^2}\left[\frac{(d, F) - (f, F)}{(o, F)(o, F')}\right].$$

Or

$$df(d, F') = r^2, \quad (d, F) - (f, F) = df \cos(F, F');$$

donc

$$\sum I_{\lambda\lambda'} = \frac{I_{dd'}}{S^2} - \frac{\cos(F, F')}{(o, F)(o, F')}.$$

Si l'on construit la sphère adjointe aux plans F, F′ relative au centre o de la surface S, la puissance du point o

par rapport à cette sphère a pour valeur $\frac{(o, F)(o, F')}{\cos(F, F')}$; le théorème est donc démontré.

Lorsque les points d et d' coïncident, on voit que *la somme des indices de trois axes rectangulaires passant par un point fixe d est égale à la somme des carrés des inverses des demi-axes de la surface* S, *multipliée par l'indice du point d et diminuée de l'inverse du carré de la distance du centre de* S *au plan polaire du point d*,

$$I_\lambda + I_\mu + I_\nu = \frac{I_d}{S^2} - \frac{1}{(o, F)^2}.$$

84. D'après la relation (b) du n° 65, on a

$$\frac{I_{aa'}}{(a, \alpha)(a', \alpha')} = \frac{I_{DD'}}{I_{\alpha\alpha'}},$$

D et D' désignant les plans des deux triangles correspondants abc, $a'b'c'$, α et α' les côtés opposés aux sommets a et a'. A l'aide de cette relation, celle à trois termes du n° 55 nous donne

$$I_{ee'} = I_{DD'}\left[\frac{(e, \alpha)(e', \alpha')}{I_{\alpha\alpha'}} + \frac{(e, \beta)(e', \beta')}{I_{\beta\beta'}} + \frac{(e, \gamma)(e', \gamma')}{I_{\gamma\gamma'}}\right].$$

Supposons les plans D, D' parallèles. Traçons dans le premier deux droites ε, φ perpendiculaires entre elles, et dans le second deux droites ε', φ' parallèles aux premières. Si l'on prend le point e à l'infini sur ε, le point e' à l'infini sur ε', et que ε_0 soit le demi-diamètre de S parallèle à ε, la relation précédente donne

$$\frac{1}{\varepsilon_0^2} = I_{DD'} \sum \frac{\cos\varphi\alpha \cos\varphi\alpha'}{I_{\alpha\alpha'}},$$

et, si φ_0 est le demi-diamètre de S parallèle à φ, on a de

même

$$\frac{1}{\varphi_1^2} = I_{DD'} \sum \frac{\cos \varepsilon\alpha \cos \varepsilon\alpha'}{I_{\alpha\alpha'}}.$$

L'addition de ces deux égalités donne ce théorème :

Si dans deux plans parallèles D, D′ *on prend deux triangles correspondants* $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ *par rapport à la surface* S, *la somme*

$$\frac{\cos \alpha\alpha'}{I_{\alpha\alpha'}} + \frac{\cos \beta\beta'}{I_{\beta\beta'}} + \frac{\cos \gamma\gamma'}{I_{\gamma\gamma'}}$$

est égale à la somme des carrés des inverses des demi-axes de la section diamétrale parallèle aux plans D, D′ *divisée par l'indice du système de ces plans.*

Propriétés des systèmes de points, droites et plans conjugués à une surface du second ordre.

85. Deux points sont conjugués lorsque le plan polaire de l'un passe par l'autre. Deux droites sont conjuguées lorsque la polaire de l'une rencontre l'autre. Deux plans sont conjugués lorsque le pôle de l'un est situé dans l'autre. Un point et une droite sont conjugués lorsque le plan polaire du point contient la droite. Une droite et un plan sont conjugués lorsque le pôle du plan est sur la droite.

Lorsque deux systèmes correspondants coïncident, ils forment un système conjugué.

Les théorèmes que nous allons énoncer se déduisent immédiatement de ceux qui ont été démontrés précédemment : nous nous bornerons pour chacun d'eux à rappeler le numéro d'où ils sont extraits.

1° *Le produit des indices de deux points conjugués est égal à l'indice de la droite qu'ils déterminent, mul-*

tiplié par le carré de leur distance

$$I_a I_b = \overline{ab}^2 I_\gamma. \quad (59, 3°)$$

2° *Le produit des indices d'un point et d'une droite conjugués est égal à l'indice du plan déterminé par le point et la droite, multiplié par le carré de la distance du point à la droite*

$$I_c I_\gamma = (c, \gamma)^2 I_D. \quad (65, b)$$

3° *Le produit des indices d'un plan et de son pôle est égal et de signe contraire au carré de la distance du pôle au plan, divisé par* π^2,

$$I_d I_D = -\frac{(d, D)^2}{\pi^2}. \quad (65, a)$$

4° *Le produit des indices de deux droites conjuguées (qui se coupent) est égal à l'indice du plan qu'elles déterminent, multiplié par l'indice de leur point d'intersection et par le carré du sinus de leur angle*

$$I_\beta I_\gamma = I_a I_D \sin^2 \beta\gamma. \quad (63, 2°)$$

5° *Le produit des indices d'une droite et d'un plan conjugués, pris en signe contraire, est égal à l'indice de leur point d'intersection, multiplié par le carré du sinus de leur angle et divisé par* π^2,

$$I_\nu I_C = -\frac{I_d \sin^2(\nu, C)}{\pi^2}. \quad (65, c)$$

6° *Le produit des indices de deux droites polaires réciproques par rapport à la surface* S *est égal et de signe contraire au carré de leur plus courte distance, multiplié par le carré du sinus de leur angle et divisé par* π^2,

$$I_\gamma I_\nu = -\frac{|\gamma . \nu|^2}{\pi^2}. \quad (65, d)$$

7° *Le produit des indices de deux plans conjugués, pris en signe contraire, est égal à l'indice de leur droite d'intersection multiplié par le carré du sinus de l'angle de ces plans et divisé par* π^2,

$$I_A I_B = -\frac{\sin^2 ABI_\nu}{\pi^2}. \quad (61, 3°)$$

8° *Le produit des indices des sommets d'un triangle conjugué est égal à l'indice du plan du triangle, multiplié par le carré du double de sa surface*

$$I_a I_b I_c = 4\overline{abc}^2 I_D. \quad (59, 2°)$$

9° *Le produit des indices des faces d'un trièdre conjugué est égal à l'indice de son sommet, multiplié par le carré du sinus de l'angle solide formé par des normales à ces trois faces et divisé par* π^4,

$$I_A I_B I_C = \frac{I_d \sin^2 ABC}{\pi^4}. \quad (61, 2°)$$

10° *Le produit des indices des côtés d'un triangle conjugué est égal au carré de l'indice du plan du triangle, multiplié par le carré de sa surface et divisé par le carré du rayon du cercle qui lui est circonscrit,*

$$I_\alpha I_\beta I_\gamma = \frac{D^2}{R^2} I_D^2. \quad (64, 1°)$$

11° *Le produit des indices des arêtes d'un trièdre conjugué est égal au carré de l'indice de son sommet, pris en signe contraire, multiplié par le carré du sinus de l'angle solide déterminé par ces arêtes et divisé par* π^2,

$$I_\lambda I_\mu I_\nu = -\frac{I_d^2 \sin^2 \lambda\mu\nu}{\pi^2}. \quad (63, 1°)$$

12° *Le produit, pris en signe contraire, des indices*

des sommets d'un tétraèdre conjugué est égal au carré du sextuple de son volume, divisé par π^2,

$$I_a I_b I_c I_d = -\frac{(6V)^2}{\pi^2}. \quad (59, 1^\circ)$$

13° *Le produit, pris en signe contraire, des indices des arêtes d'un tétraèdre conjugué est égal à la sixième puissance du sextuple de son volume, divisé par le carré du produit des arêtes et par* π^6,

$$I_\alpha I_\beta I_\gamma I_\lambda I_\mu I_\nu = -\frac{(6V)^6}{\pi^6 P^2}. \quad (65, e)$$

14° *Le produit, pris en signe contraire, des indices des faces d'un tétraèdre conjugué est égal à la sixième puissance du triple de son volume divisé par quatre fois le produit des carrés des aires des faces et par* π^6,

$$I_A I_B I_C I_D = -\frac{(3V)^6}{4\pi^6 A^2 B^2 C^2 D^2}. \quad (61, 1^\circ)$$

15° *La somme des inverses des indices de deux points conjugués est égale à l'inverse de l'indice du point milieu de la corde déterminée, dans la surface, par la droite qui joint les deux points* (60, 3°).

16° *La somme des inverses des indices des sommets d'un triangle conjugué est égal à l'inverse de l'indice du centre de la section déterminée, dans la surface, par le plan du triangle* (60, 2°).

17° *La somme des inverses des indices des sommets d'un tétraèdre conjugué est égale à* — 1 (60, 1°).

18° *La somme des inverses des indices des côtés d'un triangle conjugué est égale à la somme des carrés des inverses des demi-axes de la section diamétrale parallèle au plan du triangle, divisé par l'indice de ce plan* (84).

19° *La somme des inverses des indices des arêtes d'un trièdre conjugué est égale au carré de la distance du centre de la surface au sommet du trièdre diminué de la somme des carrés des demi-axes de la surface et divisé par l'indice du sommet du trièdre, pris en signe contraire* (82).

20° *La somme des inverses des indices des arêtes d'un tétraèdre conjugué est égale à la somme des carrés des demi-axes de la surface prise en signe contraire* (71).

21° *Un tétraèdre étant conjugué à la surface* S, *la somme des rapports que l'on obtient en divisant le carré de la distance d'un point o' à chaque sommet du tétraèdre, par l'indice de ce sommet, est égale à la somme des carrés des demi-axes de la surface diminuée du carré de la distance du centre de la surface à ce point o'* (72).

22° *Lorsqu'un tétraèdre est conjugué à la surface* S, *si l'on circonscrit au tétraèdre une seconde surface* S', *l'indice du centre de* S *par rapport à* S' *est égal à la somme des carrés des rapports que l'on obtient en divisant trois diamètres conjugués de* S *par les diamètres de* S' *respectivement parallèles* (74).

Si S' est une sphère, on a ce théorème :

23° *Lorsqu'un tétraèdre est conjugué à la surface* S, *la somme des carrés des demi-axes de cette surface est égale à la puissance de son centre par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre* (73).

Si S est une sphère, on a celui-ci :

24° *Un tétraèdre étant conjugué à une sphère, si l'on circonscrit à ce tétraèdre une surface* S' *du second degré, la somme des carrés des inverses des demi-axes de* S' *est égale à l'indice du centre de la sphère par rapport à* S' *divisé par le carré du rayon de la sphère* (75).

25° *Lorsqu'un tétraèdre est conjugué à la surface* S, *la somme des inverses des indices de ses faces, prise en signe contraire, est égale à la somme des carrés des rectangles construits sur les demi-axes de la surface* (77).

26° *Lorsqu'un tétraèdre est conjugué à la surface* S, *la somme des inverses des indices de ses faces, prise en signe contraire, est égale à l'indice du centre d'une sphère inscrite au tétraèdre divisé par le carré du rayon de cette sphère et multiplié par* π^2 (55).

La comparaison de ces deux théorèmes donne le suivant :

27° *Lorsqu'un tétraèdre est conjugué à la surface* S, *la somme des carrés des inverses des demi-axes de cette surface est égale à l'indice du centre d'une sphère inscrite au tétraèdre divisé par le carré du rayon de cette sphère* (80).

28° *Un tétraèdre est conjugué à la surface* S; *d'un point quelconque f, on abaisse des perpendiculaires sur ses faces, et l'on fait passer une sphère par les pieds de ces perpendiculaires. Si l'on désigne par g la projection du point f sur le plan polaire de ce point f pris par rapport à la surface* S, *la somme des carrés des inverses des demi-axes de la surface est donnée par l'expression*

$$\frac{I_f}{\overline{fg}^2}\left(1 - \frac{P_f}{P_g}\right),$$

P_f *et* P_g *étant les puissances des points f et g par rapport à la sphère* (78).

29° *Un tétraèdre est conjugué à la surface* S; *du centre de cette surface on abaisse des perpendiculaires sur les faces du tétraèdre, et l'on fait passer une sphère*

par les pieds des perpendiculaires. La somme des carrés des inverses des demi-axes de la surface est égale à l'inverse de la puissance de son centre par rapport à la sphère (79).

30° *Un tétraèdre abcd ou* ABCD *étant conjugué à la surface* S, *l'indice du système des points e, e' est donné par la relation*

$$\left.\begin{aligned}-\pi^2 I_{ee'} = \frac{(e,A)(e',A)}{I_A} + \frac{(e,B)(e',B)}{I_B} \\ + \frac{(e,C)(e',C)}{I_C} + \frac{(e,D)(e',D)}{I_D};\end{aligned}\right\} \quad (55)$$

l'indice du système des plans E, E' *est donné par la relation*

$$\left.\begin{aligned}-\pi^2 I_{EE'} = \frac{(a,E)(a,E')}{I_a} + \frac{(b,E)(b,E')}{I_b} \\ + \frac{(c,E)(c,E')}{I_c} + \frac{(d,E)(d',E)}{I_d};\end{aligned}\right\} \quad (56)$$

l'indice du système des droites ε, ε' est donné par les relations

$$\pi^4 ef.e'f' I_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \begin{vmatrix} (e,A) & (f,A) \\ (e,B) & (f,B) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (e',A) & (f',A) \\ (e',B) & (f',B) \end{vmatrix} \frac{1}{I_A I}:$$

$$-\pi^2 \sin EF \sin E'F' I_{\varepsilon\varepsilon'}$$

$$= \sum \begin{vmatrix} (a,E) & (a,F) \\ (b,E) & (b,F) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (a,E') & (a,F') \\ (b,E') & (b,F') \end{vmatrix} \frac{1}{I_a I_b},$$

selon que les droites sont déterminées par deux points ou deux plans (57).

31° *Un triangle abc ou αβγ étant conjugué à la surface* S, *si l'on prend dans le plan du triangle deux points e, e', on a*

$$I_{ee'} = \frac{(e,\alpha)(e',\alpha)}{(a,\alpha)^2} I_a + \frac{(e,\beta)(e',\beta)}{(b,\beta)^2} I_b + \frac{(e,\gamma)(e',\gamma)}{(c,\gamma)^2} I_c, \quad (55)$$

ou bien, D *étant le plan du triangle,*

$$I_{ee'} = I_D \left[\frac{(e, \alpha)(e', \alpha)}{I_\alpha} + \frac{(e, \beta)(e', \beta)}{I_\beta} + \frac{(e, \gamma)(e', \gamma)}{I_\gamma} \right].$$

32° *Un trièdre* ABC *ou* $\lambda\mu\nu$ *étant conjugué à la surface* S, *si l'on mène par son sommet deux plans* E, E', *on a*

$$\left. \begin{aligned} I_{EE'} = & \frac{\sin\lambda E \sin\lambda E'}{\sin^2\lambda A} I_A + \frac{\sin\mu E \sin\mu E'}{\sin^2\mu B} I_B \\ & + \frac{\sin\nu E \sin\nu E'}{\sin^2\nu C} I_C, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

ou bien, d étant le sommet du trièdre,

$$-\pi^2 I_{EE'} = I_d \left(\frac{\sin\lambda E \sin\lambda E'}{I_\lambda} + \frac{\sin\mu E \sin\mu E'}{I_\mu} + \frac{\sin\nu E \sin\nu E'}{I_\nu} \right).$$

33° *Un triangle abc ou* $\alpha\beta\gamma$ *étant conjugué à la surface* S, *si l'on trace dans son plan deux droites* ε, ε', *on a*

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = \frac{(a, \varepsilon)(a, \varepsilon')}{(a, \alpha)^2} I_\alpha + \frac{(b, \varepsilon)(b, \varepsilon')}{(b, \beta)^2} I_\beta + \frac{(c, \varepsilon)(c, \varepsilon')}{(c, \gamma)^2} I_\gamma, \quad (57)$$

ou bien, D *désignant le plan du triangle abc,*

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = I_D \left[\frac{(a, \varepsilon)(a, \varepsilon')}{I_a} + \frac{(b, \varepsilon)(b, \varepsilon')}{I_b} + \frac{(c, \varepsilon)(c, \varepsilon')}{I_c} \right].$$

34° *Un trièdre* ABC *ou* $\lambda\mu\nu$ *étant conjugué à la surface* S, *si, par son sommet, on mène deux droites* ε, ε', *on a*

$$\left. \begin{aligned} I_{\varepsilon\varepsilon'} = & \frac{\sin(\varepsilon, A)\sin(\varepsilon', A)}{\sin^2(\lambda, A)} I_\lambda + \frac{\sin(\varepsilon, B)\sin(\varepsilon', B)}{\sin^2(\mu, B)} I_\mu \\ & + \frac{\sin(\varepsilon, C)\sin(\varepsilon', C)}{\sin^2(\nu, C)} I_\nu, \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

ou bien, d étant le sommet du trièdre,

$$-\pi^2 I_{\varepsilon\varepsilon'} = I_d \left[\frac{\sin(\varepsilon, A)\sin(\varepsilon', A)}{I_A} + \frac{\sin(\varepsilon, B)\sin(\varepsilon', B)}{I_B} + \frac{\sin(\varepsilon, C)\sin(\varepsilon', C)}{I_C} \right].$$

35° *Un segment ab étant conjugué à la surface* S, *si l'on prend sur ce segment deux points e, e',*

$$\overline{ab}^2 I_{ee'} = eb.e'b I_a + ea.e'a I_b. \quad (55)$$

36° *Un dièdre* AB *étant conjugué à la surface* S, *si par son arête on mène deux plans* E, E', *on a*

$$\sin^2 AB I_{EE'} = \sin EB \sin E'B I_A + \sin EA \sin E'A I_B. \quad (56)$$

37° *Un angle* $\lambda\mu$ *étant conjugué à la surface* S, *si l'on mène par son sommet et dans son plan les droites* $\varepsilon, \varepsilon'$, *on a*

$$\sin^2 \lambda\mu I_{\varepsilon\varepsilon'} = \sin(\varepsilon, \mu)\sin(\varepsilon', \mu) I_\lambda + \sin(\varepsilon, \lambda)\sin(\varepsilon', \lambda) I_\mu. \quad (57)$$

38° Si l'on suppose que le sommet *d* du tétraèdre *abcd* conjugué à la surface S coïncide avec le centre *o* de la surface, les points *a*, *b*, *c* seront à l'infini et *oa*, *ob*, *oc* seront les directions de trois diamètres conjugués de la surface. Nous désignerons par λ, μ, ν les longueurs des demi-diamètres ainsi déterminés. Le plan D sera à l'infini, et les plans A, B, C passent respeetivement par les diamètres $\mu\nu$, $\nu\lambda$, $\lambda\mu$.

Les relations exprimées dans les théorèmes précédents (30°) deviennent les suivantes :

Indice du système des deux points e, e' :

$$I_{ee'} = \frac{(e, A)(e', A)}{\lambda^2 \sin^2(\lambda, A)} + \frac{(e, B)(e', B)}{\mu^2 \sin^2(\mu, B)} + \frac{(e, C)(e', C)}{\nu^2 \sin^2(\nu, C)} - 1.$$

Indice du système des deux plans E, E' :

$$\pi^2 I_{EE'} = (o, E)(o, E') - \lambda^2 \sin\lambda E \sin\lambda E' - \mu^2 \sin\mu E \sin\mu E' - \nu^2 \sin\nu E \sin\nu E'.$$

Indice du système de deux droites déterminées par deux de leurs points :

$$ef.e'f'\mathrm{I}_{u'}$$

$$=\sum\begin{vmatrix}(e,\mathrm{A}) & (f,\mathrm{A})\\ (e,\mathrm{B}) & (f,\mathrm{B})\end{vmatrix}\begin{vmatrix}(e',\mathrm{A}) & (f',\mathrm{A})\\ (e',\mathrm{B}) & (f',\mathrm{B})\end{vmatrix}\frac{1}{\lambda^2\mu^2\sin^2(\lambda,\mathrm{A})\sin^2(\mu,\mathrm{B})}$$

$$-\sum\begin{vmatrix}(e,\mathrm{C}) & (f,\mathrm{C})\\ 1 & 1\end{vmatrix}\begin{vmatrix}(e',\mathrm{C}) & (f',\mathrm{C})\\ 1 & 1\end{vmatrix}\frac{1}{\nu^2\sin^2(\nu,\mathrm{C})}.$$

Indice du système de deux droites déterminées par deux plans :

$$\pi^2\sin\mathrm{EF}\sin\mathrm{E'F'}\,\mathrm{I}_{u'}$$

$$=-\sum\begin{vmatrix}\sin\lambda\mathrm{E} & \sin\lambda\mathrm{F}\\ \sin\mu\mathrm{E} & \sin\mu\mathrm{F}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\sin\lambda\mathrm{E'} & \sin\lambda\mathrm{F'}\\ \sin\mu\mathrm{E'} & \sin\mu\mathrm{F'}\end{vmatrix}\lambda^2\mu^2$$

$$+\sum\begin{vmatrix}\sin\nu\mathrm{E} & \sin\nu\mathrm{F}\\ (o,\mathrm{E}) & (o,\mathrm{F})\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\sin\nu\mathrm{E'} & \sin\nu\mathrm{F'}\\ (o,\mathrm{E'}) & (o,\mathrm{F'})\end{vmatrix}\nu^2.$$

SUR LES SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES NOMBRES ENTIERS;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

---

1. Soit, en général, une fonction entière $\Delta f(x)$ égale à la différence d'une fonction $f(x)$, pour une différence de l'argument égale à l'unité

$$\Delta f(x)=f(x+1)-f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n;$$

en remplaçant successivement x par 1, 2, 3, ..., $(x-1)$, et en posant

$$\mathrm{S}_n=1^n+2^n+3^n+\ldots+(x-1)^n,$$

on obtient par addition

$$f(x)-f(1)=a_0\mathrm{S}_n+a_1\mathrm{S}_{n-1}+a_2\mathrm{S}_{n-2}+\ldots+a_n\mathrm{S}_0,$$

ou, *symboliquement*,

$$(1)\qquad f(x) - f(1) = \Delta f(S),$$

en ayant soin de ne pas oublier l'exposant zéro de S.

Faisons, dans la formule (1), $f(x)$ égal à $(x-1)^n$ ou à x^n, nous obtenons

$$(2)\qquad (x-1)^n = S^n - (S-1)^n,$$

$$(3)\qquad x^n - 1 = (S+1)^n - S^n,$$

et, par addition et soustraction, les deux formules

$$(4)\qquad x^n + (x-1)^n - 1 = (S+1)^n - (S-1)^n,$$

$$(5)\qquad x^n - (x-1)^n - 1 = (S+1)^n + (S-1)^n - 2S_n,$$

qui permettent de calculer les sommes S de deux en deux, par voie récurrente. Mais on peut, pour parvenir au même but, se servir de la formule suivante. En effet, faisons encore, dans la formule (1), $f(x)$ égal à $\left(x - \frac{1}{2}\right)^n$, nous obtenons l'équation

$$(6)\qquad (2x-1)^n - 1 = (2S+1)^n - (2S-1)^n,$$

qui a été donnée par M. Gilbert, au moyen de l'analyse infinitésimale (*Nouvelles Annales de Mathématiques*).

Enfin, si, dans la formule (1), on suppose

$$f(x) = (x+z)(x+z+1)\ldots(x+z+n-1),$$

on obtient

$$(7)\quad f(x) - f(1) = n(S+z+1)(S+z+2)\ldots(S+z+n-1),$$

et plus particulièrement, pour $z = 0$ et pour $z = -1$,

$$(8)\quad \begin{cases} x(x+1)\ldots(x+n-1) \\ \quad = n(S+1)(S+2)\ldots(S+n-1) + 1.2.3\ldots n, \\ (x-1)x\ldots(x+n-2) = nS(S+1)\ldots(S+n-2). \end{cases}$$

2. On tire du système des n équations obtenues en remplaçant successivement n par 1, 2, 3, ..., n, dans la formule (3), le déterminant

$$(9)\quad 1.2.3\ldots n.S_{n-1} = \begin{vmatrix} x^n & C_n^{n-2} & C_n^{n-3} & \ldots & C_n^1 & 1 \\ x^{n-1} & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3} & \ldots & C_{n-1}^1 & 1 \\ x^{n-2} & 0 & C_{n-2}^{n-3} & \ldots & C_{n+2}^1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x^2 & 0 & 0 & \ldots & C_2^1 & 1 \\ x & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

On obtient un déterminant plus simple au moyen de l'une des formules (4), (5) ou (6). Cette dernière donne, par exemple, pour des valeurs impaires de l'exposant

$$(10)\quad 1.3.5\ldots(2n+1)\,2^{2n+1}S_{2n} = \begin{vmatrix} (2x-1)^{2n+1} & C_{2n+1}^{2n-2} & C_{2n+1}^{2n-4} & \ldots & C_{2n+1}^2 & 1 \\ (2x-1)^{2n-1} & C_{2n-1}^{2n-2} & C_{2n-1}^{2n-4} & \ldots & C_{2n-1}^2 & 1 \\ (2x-1)^{2n-3} & 0 & C_{2n-3}^{2n-4} & \ldots & C_{2n-3}^2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (2x-1)^3 & 0 & 0 & \ldots & C_3^2 & 1 \\ (2x-1)^1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Enfin on peut obtenir S_n en fonction d'un déterminant contenant au moins $(n+1)$ fonctions arbitraires de x; pour cela, il suffit de considérer $(n+1)$ équations semblables à l'équation (1).

3. La formule (1) peut être généralisée par l'introduction de nouvelles variables. En effet, on peut écrire cette formule de la manière suivante :

$$\Delta_x f(1, y) = \Delta_s f(S, y),$$

en supposant l'accroissement de x égal à $(x-1)$, et ce-

lui de S à l'unité; on en déduit

$$(11)\qquad \Delta^2_{x,y} f(1,1) = \Delta^2_{s,s'} f(S, S'),$$

et, de même,

$$(12)\qquad \Delta^p_{x,y,z,\ldots} f(1,1,1,\ldots) = \Delta^p_{s,s',s'',\ldots} f(S, S', S'', \ldots),$$

p désignant le nombre des variables; les accroissements du premier membre sont respectivement égaux à $(x-1)$, $(y-1)$, $(z-1)$, ..., et ceux du second membre à l'unité. On ne doit pas réduire les S avec les S' et les S''; mais on remplacera, après le développement du second membre, S^n, S'^n, S''^n par S_n, et l'on obtiendra des relations entre les produits deux à deux, trois à trois, etc., des sommes S.

4. On peut poser, symboliquement, l'égalité

$$(13)\qquad n S_{n-1} = (x + B)^n - B^n,$$

dans laquelle on remplace les exposants de B par des indices, et B_0 par l'unité. Ces coefficients B sont appelés *nombres de Bernoulli*, parce que Jacques Bernoulli les a remarqués, le premier, comme formant le coefficient du dernier terme, dans les sommes des puissances paires. La comparaison des formules (9) et (13) donne

$$(14)\qquad 1.2.3\ldots n.B_{n-1} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} C_n^{n-2} & C_n^{n-3} & \ldots & C_n^1 & 1 \\ C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3} & \ldots & C_{n-1}^1 & 1 \\ 0 & C_{n-2}^{n-3} & \ldots & C_{n-2}^1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & C_2^1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il serait facile de trouver ainsi un grand nombre de formules semblables, mais on peut aussi calculer les coefficients B de la manière suivante. En changeant x

en $x+1$, dans la relation (13), on obtient, par différence, l'identité

$$(15)\qquad n x^{n-1} = (x + B + 1)^n - (x + B)^n,$$

qui a lieu pour toutes les valeurs entières et positives de x et, par suite, quelle que soit la valeur de x. En particulier, pour $x=0$, $x=\pm 1$, $x=-\frac{1}{2}$, et, par addition et par soustraction, on a les relations récurrentes

$$(16)\qquad \begin{cases} (B+1)^n - B^n = 0, \\ B^n - (B-1)^n = n(-1)^{n-1}, \\ (B+1)^n + (B-1)^n = n(-1)^{n-1}, \\ (B+2)^n - (B+1)^n = n, \\ (2B+1)^n - (2B-1)^n = 2n(-1)^{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

La première de ces relations a été indiquée par Moivre.

On peut encore obtenir les nombres B au moyen de déterminants déduits des équations (15) et (16); le calcul donne, pour les premiers coefficients,

$$B_0 = 1,\quad B_1 = -\frac{1}{2},\quad B_2 = \frac{1}{6},\quad B_4 = -\frac{1}{30},$$
$$B_6 = \frac{1}{42},\quad B_8 = -\frac{1}{30},\quad \dots$$

Les coefficients d'indice impair sont nuls, à l'exception de B_1, ainsi que cela résulte de la troisième et de la cinquième des formules (16); d'autre part, l'équation (14) fait voir que le produit $1.2.3\dots n\,B_{n-1}$ est entier.

Enfin on déduit encore de la formule (13) l'égalité

$$(17)\qquad \frac{dS_n}{dx} = nS_{n-1} + B_n,$$

qui permet de calculer rapidement S_n par voie d'intégra-

tion, en calculant chaque fois la constante par l'une des conditions

$$S_n = 1 \text{ pour } x = 2 \quad \text{et} \quad S_n = 0 \text{ pour } x = 1.$$

5. Si l'on observe que le premier membre de la formule (15) est la dérivée de x^n, et le second, la différence de $(x + B)^n$, on a, plus généralement,

$$(18) \qquad f(x + B + 1) - f(x + B) = f'(x).$$

Posons, par exemple,

$$f(x) = x(x + 1) \ldots (x + n - 1),$$

nous obtenons

$$(19) \quad \begin{cases} \dfrac{n}{x} = \dfrac{B + x + 1}{x + 1} \dfrac{B + x + 2}{x + 2} \cdots \dfrac{B + x + n - 1}{x + n - 1} \\ \quad = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1} + \ldots + \dfrac{1}{x + n - 1}. \end{cases}$$

Dans l'hypothèse $x = 1$, nous avons

$$(20) \quad \begin{cases} \dfrac{n}{1} \dfrac{B + 2}{2} \dfrac{B + 3}{3} \cdots \dfrac{B + n}{n} \\ \quad = \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}, \end{cases}$$

et, pour $x = 0$, en augmentant n d'une unité,

$$(21) \qquad (B + 1)(B + 2) \ldots (B + n) = \frac{1.2.3\ldots n}{n + 1}.$$

La formule (18) donne, pour $x = 0$,

$$(22) \qquad f(B + 1) - f(B) = f'(0);$$

faisons maintenant $f(x) = e^{xz}$, il vient

$$e^{Bz}(e^z - 1) = z,$$

et, par suite,

(23) $$e^{Bz} = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Cette formule, souvent employée en Analyse, subsiste pour toutes les valeurs de z dont le module est inférieur à 2π.

Faisons encore, dans la formule (22),

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{1}{2}\right)z,$$

nous obtenons

(24) $$\cos Bz = \frac{z}{2}\cot\frac{z}{2}.$$

6. Si l'on introduit une seconde variable y dans la formule (18), on a

$$\Delta_x f(x + B, y) = \frac{df(x,y)}{dx},$$

en supposant $\Delta x = 1$; si l'on applique ce résultat à la fonction $\frac{df(x,y)}{dx}$ de y, on aura

(25) $$\Delta_{x,y} f(x + B, y + B') = \frac{d^2 f(x,y)}{dx\,dy},$$

et, en général,

(26) $$\Delta^p_{x,y,z,\ldots} f(x + B, y + B', z + B'', \ldots) = \frac{d^p f(x,y,z,\ldots)}{dx\,dy\,dz\ldots},$$

en supposant $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \ldots = 1$. On ne réduira pas les B avec les B' et les B''; mais, lorsque le développement symbolique du premier membre sera effectué, on remplacera B^n, B'^n, B''^n, ... par B_n. On aura ainsi les relations contenant les produits deux à deux, trois à trois, etc., des nombres de Bernoulli.

7. On a, d'après les résultats obtenus dans un article

précédent (*Nouvelles Annales*, novembre 1875), la formule

$$(27)\quad S_m S_n - S_{m+n} = S^m \frac{(S+B)^{n+1} - B^{n+1}}{n+1} + S^n \frac{(S+B)^{m+1} - B^{m+1}}{m+1};$$

pour $m = n$,

$$(28)\qquad \frac{n+1}{2} S_n^2 = S^n (S+B)^{n+1} - S^n B^{n+1},$$

en remplaçant B_1 par zéro. On déduit, inversement,

$$(29)\quad 2 S_{2n+1} = \begin{vmatrix} (n+1) S_n^2 & C_{n+1}^2 B_2 & C_{n+1}^4 B_4 & \dots & 0 & 0 \\ n S_{n-1}^2 & 1 & C_n^2 B_2 & \dots & 0 & 0 \\ (n-1) S_{n-2}^2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 4 S_3^2 & 0 & 0 & \dots & C_4^2 B_2 & 0 \\ 3 S_2^2 & 0 & 0 & \dots & 1 & C_3^2 B_2 \\ 2 S_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Il résulte immédiatement de la formule (13) que les rapports

$$\frac{S_n}{x} \quad \text{et} \quad \frac{S_{2n+1}}{x^2}$$

ont respectivement pour valeurs

$$B_n \quad \text{et} \quad \frac{2n+1}{2} B_{2n},$$

lorsque x tend vers zéro. Si l'on introduit ces hypothèses dans les relations précédentes, dans les relations (27) et (29), par exemple, on trouve

$$(30)\quad \left\{ \begin{aligned} B_{m+n} = {} & B^m \frac{(B+B')^{n+1} - B'^{n+1}}{n+1} \\ & + B^n \frac{(B+B')^{m+1} - B'^{m+1}}{m+1}, \end{aligned} \right.$$

et

$$(31)\qquad (2n+1)B_{2n} = \begin{vmatrix} (n+1)B_n^2 & C_{n+1}^2 B_2 & C_{n+1}^4 B_4 & \ldots & 0 & 0 \\ nB_{n-1}^2 & 1 & C_n^2 B_2 & \ldots & 0 & 0 \\ (n-1)B_{n-2}^2 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 4B_3^2 & 0 & 0 & \ldots & C_4^2 B_2 & 0 \\ 3B_2^2 & 0 & 0 & \ldots & 1 & C_3^2 B_2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

NOTE SUR UN THÉORÈME FONDAMENTAL DANS LA THÉORIE DES COURBES ;

Par M. H. LAURENT.

On sait que, lorsque deux courbes variables de forme et de position ont ensemble $n+1$ points communs et que ces points, dans une position particulière de la figure, viennent à se confondre, elles ont un contact d'une nature particulière, et que l'on appelle *contact d'ordre n* ; au point de contact les ordonnées des deux courbes sont égales, ainsi que leurs n premières dérivées. Cette proposition n'est pas démontrée d'habitude avec toute la rigueur désirable. Je me propose d'en donner ici une démonstration que je crois irréprochable.

Soient $f(x)$ et $\varphi(x)$ les ordonnées des deux courbes correspondant à l'abscisse x; si les courbes ont $n+1$ points communs, on pourra représenter leurs abscisses par

$$x_1, x_2, \quad \ldots, \quad x_{n+1},$$

et leurs ordonnées par

$$f(x_1) = \varphi(x_1), \quad \ldots, \quad f(x_{n+1}) = \varphi(x_{n+1}).$$

Si l'on considère alors la fonction $f(x) - \varphi(x)$, elle s'annulera pour les valeurs supposées croissantes :

$$x = x_1, \quad x = x_2, \quad \ldots, \quad x = x_{n+1};$$

donc, en vertu du théorème de Rolle, sa dérivée sera nulle pour n valeurs de x, à savoir x'_1 compris entre x_1 et x_2, x'_2 compris entre x_2 et $x_3, \ldots, x'_n$ compris entre x_n et x_{n+1}. Toujours en vertu du théorème de Rolle, sa dérivée seconde s'annulera pour $n - 1$ valeurs de x comprises : la première, entre x'_1 et $x'_2, \ldots$, et, par suite, comprises toutes entre x'_1 et x''_n, c'est-à-dire entre x_1 et x_{n+1}. En continuant ainsi, on voit que $f^n(x) - \varphi^n(x)$ s'annulera pour une valeur de x comprise entre la plus grande et la plus petite des quantités $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Soit ξ cette valeur ; on aura

$$f^n(\xi) - \varphi^n(\xi) = 0$$

ou

$$f^n(\xi) = \varphi^n(\xi).$$

Si l'on suppose maintenant que $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ tendent simultanément vers la valeur x, on aura

$$f^n(x) = \varphi^n(x),$$

et la démonstration faite pour les $n^{\text{ièmes}}$ dérivées s'applique, bien entendu, aux dérivées d'ordre moins élevé.

La démonstration précédente fait bien ressortir les cas où le théorème énoncé tomberait en défaut, et, comme on a appliqué le théorème de Rolle, on a été obligé de supposer $f(x)$ et $\varphi(x)$ continus, ainsi que leurs $n - 1$ premières dérivées ; quant à la $n^{\text{ième}}$, on l'a simplement supposée *bien déterminée* et finie. Mais le théorème s'applique encore au cas où quelques dérivées seraient infinies si, par une transformation de coordonnées, on peut éviter qu'il en soit ainsi.

On peut donner relativement aux courbes dans l'espace une démonstration tout à fait analogue à celle-ci. Nous croyons pouvoir nous dispenser de la reproduire ici.

COMPOSITIONS ÉCRITES DONNÉES A L'ÉCOLE CENTRALE.

CONCOURS D'ADMISSION.

2e SESSION. — 10 ET 11 OCTOBRE 1876.

1° *Géométrie analytique.*

On donne, dans un plan, un angle ROR', un point A sur la bissectrice Ox de cet angle, et deux points B, B' placés symétriquement par rapport à Ox.

On mène, par le point A, une droite quelconque, qui rencontre OR en C, et OR' en C'; on mène les droites BC, B'C'; ces droites se coupent en un point M.

On demande le lieu décrit par le point M, quand la droite CAC' tourne autour du point A.

On discutera le lieu en laissant fixes les droites OR, OR' et le point A, et en déplaçant le point B, et par suite le point B'. On indiquera dans quelles régions du plan doit être placé le point B pour que le lieu soit une ellipse, une hyperbole, ou l'une de leurs variétés.

2° *Calcul trigonométrique.*

Calculer les angles et la surface d'un triangle, connaissant les trois côtés :

$$a = 11064^{m},62,$$
$$b = 25485^{m},52,$$
$$c = 24920^{m},34.$$

3° *Épure.*

On donne un triangle rectangle ABC situé dans le plan vertical de projection; l'hypoténuse BC est verticale; le sommet B a pour cote $0^m,08$; le sommet C a pour cote $0^m,20$, et l'angle B est égal à 30 degrés. Du point A comme centre, avec un rayon égal à $0^m,04$, on décrit un cercle dans le plan du triangle.

On demande :

1° De trouver l'intersection du cône engendré par le triangle tournant autour de AB et du tore engendré par le cercle tournant autour de BC ;

2° De représenter le cône supposé plein et existant seul, en supprimant la partie de ce corps comprise dans le tore.

On tracera à l'encre rouge les constructions employées pour obtenir un point quelconque de l'intersection du cône et du tore, et la tangente en ce point.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre, à $0^m,15$ du petit côté inférieur.

Titre : *Cône et tore.*

4° *Physique et Chimie.*

I. Un manomètre à air libre, qui se compose d'un tube de fer recourbé CBMA et d'un tube de verre AD plus large que le tube de fer, renferme du mercure dans ses deux branches jusqu'au niveau BA.

On met la branche BC en communication avec une masse d'eau contenue dans un récipient métallique R et l'on exerce à la surface de cette eau une pression de 6 atmosphères. Le tube AD qui est ouvert par le haut est alors complétement plein de mercure.

On demande de calculer la longueur de ce tube AD,

sachant que le rapport entre sa section et celle du tube de fer est égal à 6.

La distance verticale du niveau BA au niveau de l'eau, supposé invariable, est de $0^{m},915$. L'air contenu dans la partie BC s'est dégagé au moment où l'on a établi la communication du manomètre avec le réservoir.

Densité du mercure............ $\delta = 13,5$.

II. Préparation du chlore et de l'acide chlorhydrique. Analyse et synthèse de ce dernier corps.

BIBLIOGRAPHIE.

QUESTIONS DE TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE; méthodes et solutions, avec plus de 500 exercices proposés, à l'usage des classes de Mathématiques élémentaires et spéciales et des candidats aux écoles, par *A. Desboves*, agrégé et docteur ès sciences, professeur au lycée Fontanes. 2e édition; in-8.

Cette nouvelle édition diffère de la première par le texte complétement remanié et aussi par le choix, l'ordre et l'abondance des matières. Voici d'ailleurs quels sont les principaux changements et les améliorations les plus importantes : je parlerai d'abord de la première Partie.

Le Chapitre VIII, dans lequel on construit les racines des équations trigonométriques les plus simples et où l'on donne ainsi immédiatement les solutions géométriques d'un très-grand nombre de problèmes résolus par la Trigonométrie dans le Chapitre VI, contient maintenant, en plus, l'équation du premier degré par rapport à la tangente et à la cotangente d'un même angle inconnu.

Dans le Chapitre IX, qui renfermait déjà les développements de $\sin na$ et de $\cos na$ en fonction de $\sin a$ et $\cos a$, des formules

nouvelles relatives à un produit de cosinus, etc., on a fait entrer les formules qui donnent $\sin na$ et $\cos na$ en fonction de $\sin a$ ou $\cos a$ seulement. Leur démonstration repose sur un théorème nouveau d'Algèbre très-aisément déduit du triangle arithmétique de Pascal.

Les différentes formules qui viennent d'être rappelées se démontrent ordinairement à l'aide du théorème de Moivre; mais, sans contester la parfaite rigueur des démonstrations fondées sur l'emploi des imaginaires, je crois que celles du Chapitre IX, débarrassées de toute considération de ce genre, sont plus satisfaisantes pour l'esprit et qu'elles ont l'avantage de familiariser les élèves avec les idées d'ordre et de combinaison.

Le Chapitre X est formé par la réunion de deux Notes que renfermait la première édition, mais dont la rédaction a été beaucoup simplifiée.

Dans la seconde Partie de l'Ouvrage, les améliorations portent principalement sur les détails. Je me suis attaché surtout à chercher toujours les démonstrations les plus simples, et j'ai été quelquefois assez heureux pour substituer, à des solutions un peu longues dans la première édition, des solutions nouvelles dont la rédaction n'a demandé souvent que quelques lignes; je citerai, par exemple, les questions suivantes : IV (page 191), XI (page 199), I (page 213), VIII (page 250), XV (page 273).

Le dernier Chapitre a été augmenté de quelques questions sur la Mécanique, la Physique et l'Astronomie. Par là, j'ai voulu rappeler que la Trigonométrie était souvent un auxiliaire éminemment précieux dans les diverses sciences de calcul.

Mais l'amélioration la plus importante de tout l'Ouvrage consiste dans l'augmentation du nombre des exercices, qui s'est accru de plus d'un quart. En multipliant ainsi le nombre des exercices, j'ai voulu non-seulement offrir aux élèves une matière plus abondante, mais aussi mettre à la disposition des géomètres de nombreuses formules qui pourront quelquefois leur venir en aide. J'espère que l'on me saura quelque gré du travail considérable auquel j'ai dû me livrer, d'abord pour résoudre un grand nombre de questions, puis pour classer dans

un ordre méthodique les formules nouvelles à mesure que je les rencontrais dans mes recherches.

Enfin, qu'il me soit permis, en terminant, d'insister sur le double but que j'ai surtout essayé d'atteindre dans tout le cours de l'Ouvrage.

D'abord, comme dans mes autres livres, j'ai donné, avec de nombreux exemples, des méthodes générales pour la discussion des problèmes, et j'ai voulu ainsi fournir aux élèves les moyens d'aller jusqu'au fond des questions pour en trouver toujours le dernier mot.

Ensuite j'ai fait tous mes efforts pour donner aux solutions des questions ce cachet d'élégante simplicité qui est le propre de la Trigonométrie, et je crois avoir montré qu'il y avait, dans la recherche des formules et leur combinaison, tout un art, à la fois délicat et plein d'attrait.

Mais c'est ce que l'on verra mieux encore dans un nouvel Ouvrage actuellement sous presse (*), qui contiendra les solutions des exercices proposés dans les *Questions de Trigonométrie*, au nombre de plus de 500. Là surtout, le choix des questions et leur grande variété ont donné l'occasion d'employer toutes les ressources de la Trigonométrie et de mettre en relief ses méthodes les plus élégantes et ses procédés les plus ingénieux.

A. Desboves.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. Moret-Blanc. — Dans la solution de la question 1142, insérée dans le numéro de novembre, je renvoie, pour les axes et les notations, à la question 1122; mais, ma solution n'ayant pas été insérée, il peut en résulter quelque obscurité pour le lecteur.

Je prends pour origine le milieu de la plus courte dis-

(*) Cet Ouvrage vient de paraître.

tance des deux droites données, cette plus courte distance pour axe des z, les bissectrices des angles formés par les parallèles à ces droites menées par l'origine pour axes des x et des y. Les équations des droites données sont

$$\begin{cases} z = c, \\ y = mx, \end{cases} \quad \begin{cases} z = -c, \\ y = -mx, \end{cases}$$

et celle du second plan directeur

$$Ax + By + C = 0.$$

Permettez-moi de vous signaler quelques fautes d'impression que j'ai remarquées en lisant le dernier numéro des *Annales*.

Page 510. Dans la dernière des équations (5), il faut au second membre $\frac{(a+b)(b\cos^2\varphi + a\sin^2\varphi)}{b\cos^2\varphi - a\sin^2\varphi}$.

Page 518, ligne 6 en remontant, au lieu de $-(bt^2+2ct+e)^2$, il faut $-(bt^2+2ct+d)^2$.

Page 527, ligne 2, au lieu de *cette droite*, il faut évidemment *la droite* (D').

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1159

(voir 2ᵉ série, t. XIV, p. 96);

PAR M. G. BEAUVAIS.

Lorsqu'un angle constant 2φ *se déplace en restant tangent à une courbe plane convexe et fermée, d'un périmètre* S, *la bissectrice extérieure de cet angle enveloppe une courbe fermée dont le périmètre est* $\frac{S}{\sin\varphi}$.

En faisant varier l'angle 2φ *et réduisant par ho-*

mothétie chacune des courbes obtenues dans un rapport égal à $\sin\varphi$, *on forme une série de courbes fermées isopérimètres. Quelle est celle de ces courbes qui comprend la plus grande aire?* (G. FOURET.)

1° Une tangente à la courbe donnée a pour équation

$$y = (x - p)\operatorname{tang}\theta,$$

θ étant l'angle de cette tangente avec OX et p une fonction connue de θ.

La tangente M'N', faisant avec la première un angle égal à 2φ, a pour équation

$$y = (x - p_1)\operatorname{tang}(\theta + 2\alpha),$$

2α étant le supplément de 2φ et p_1 la fonction p dans laquelle θ a été remplacé par $(\theta + 2\alpha)$; la bissectrice MH a pour équation

$$\frac{y - (x - p)\operatorname{tang}\theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2\theta}} - \frac{y - (x - p_1)\operatorname{tang}(\theta + 2\alpha)}{\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2(\theta + 2\alpha)}} = 0,$$

ou

$$y[\cos\theta + \cos(\theta + 2\alpha)] - x[\sin\theta + \sin(\theta + 2\alpha)] + p\sin\theta + p_1\sin(\theta + 2\alpha) = 0.$$

Cela posé, la longueur Σ de la courbe enveloppée par cette bissectrice est donnée par la formule

$$\Sigma = \int_0^{2\pi} \mathrm{OH}\, d(\alpha + \theta) \quad (*),$$

$$\mathrm{OH} = \frac{p\sin\theta + p_1\sin(\theta + 2\alpha)}{\sqrt{[\cos\theta + \cos(\theta + 2\alpha)]^2 + [\sin\theta + \sin(\theta + 2\alpha)]^2}} = \frac{p\sin\theta + p_1\sin(\theta + 2\alpha)}{2\cos\alpha};$$

(*) *Calcul intégral* de M. Bertrand, t. II, p. 372.

donc

$$\sum = \frac{1}{2\cos\alpha}\int_0^{2\pi}[p\sin\theta + p_1\sin(\theta+2\alpha)]d(\theta+\alpha),$$

$$\sum = \frac{1}{2\cos\alpha}\int_0^{2\pi} p\sin\theta\,d\theta$$

$$+\frac{1}{2\cos\alpha}\int_0^{2\pi} p_1\sin(\theta+2\alpha)\,d(\theta+2\alpha),$$

puisque

$$d\theta = d(\alpha+\theta) = d(\theta+2\alpha);$$

mais la longueur S de la courbe donnée est

$$S = \int_0^{2\pi}\frac{p\,\text{tang}\,\theta\,d\theta}{\sqrt{1+\text{tang}^2\theta}} = \int_0^{2\pi} p\sin\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} p_1\sin(\theta+2\alpha)\,d(\theta+2\alpha);$$

donc

$$\sum = \frac{1}{2\cos\alpha}S + \frac{1}{2\cos\alpha}S = \frac{S}{\cos\alpha}.$$

2° Cherchons d'abord la surface d'une courbe fermée enveloppe de la droite

(1) $$y = (x-q)\,\text{tang}\,\psi,$$

ψ étant l'angle de la droite avec OX et q une fonction connue de ψ.

Différentions l'équation (1),

$$0 = \frac{x-q}{\cos^2\psi} - \text{tang}\,\psi\frac{dq}{d\psi};$$

de ces équations nous tirons

$$x - p = \frac{dq}{d\psi}\sin\psi\cos\psi, \quad y = \frac{dq}{d\psi}\sin^2\psi,$$

$$\frac{dx}{d\psi} = 2\cos^2\psi\frac{dq}{d\psi} + \frac{d^2q}{d\psi^2}\sin\psi\cos\psi.$$

Cela posé, A étant l'aire de la courbe,

$$2A=\int y\,dx=\int_0^{2\pi}\sin^2\psi\frac{dq}{d\psi}\left(2\frac{dq}{d\psi}\cos^2\psi+\frac{d^2q}{d\psi^2}\sin\psi\cos\psi\right)d\psi,$$

$$4A=\int_0^{2\pi}4\left(\frac{dq}{d\psi}\right)^2\sin^2\psi\cos^2\psi\,d\psi+\int_0^{2\pi}2\frac{dq}{d\psi}\frac{d^2q}{d\psi^2}\sin^3\psi\cos\psi.$$

Intégrons par parties la seconde intégrale, il vient

$$\left[\left(\frac{dq}{d\psi}\right)^2\sin^3\psi\cos\psi\right]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}\left(\frac{dq}{d\psi}\right)^2(3\sin^2\psi\cos^2\psi-\sin^4\psi)\,d\psi.$$

La première partie est nulle; il vient donc

$$4A=\int_0^{2\pi}\left(\frac{dq}{d\psi}\right)^2\sin^2\psi(4\cos^2\psi-3\cos^2\psi+\sin^2\psi)\,d\psi,$$

$$4A=\int_0^{2\pi}\left(\frac{dq}{d\psi}\right)^2\sin^2\psi\,d\psi.$$

Cette formule va nous permettre de résoudre la seconde partie du problème.

En effet, l'équation de la tangente MH peut s'écrire

$$y=\left[x-\frac{p\sin\theta+p_1\sin(\theta+2\alpha)}{2\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha}\right]\tang(\theta+\alpha);$$

l'équation de la tangente à la courbe enveloppe, réduite dans le rapport $\cos\alpha$, s'obtient en multipliant le terme indépendant de la précédente par $\cos\alpha$,

$$(3)\qquad y=\left[x-\frac{p\sin\theta+p_1\sin(\theta+2\alpha)}{2\sin(\theta+\alpha)}\right]\tang(\theta+\alpha);$$

$p\sin\theta$ est une fonction connue de θ, $F(\theta)$; en posant $\theta+\alpha=\psi$, il vient

$$p\sin\theta=F(\psi-\alpha),\quad p_1\sin(\theta+2\alpha)=F(\psi+\alpha),$$

et l'équation (3) s'écrit

$$y = \left[x - \frac{F(\psi - \alpha) + F(\psi + \alpha)}{2\sin\psi}\right]\tang\psi.$$

Nous aurons l'aire de la courbe réduite en faisant, dans l'expression de $4A$,

$$q = \frac{F(\psi - \alpha) + F(\psi + \alpha)}{2\sin\psi}.$$

La valeur de α, qui rend $4A$ maximum, annule $\frac{dA}{d\alpha}$:

$$4\frac{dA}{d\alpha} = \int_0^{2\pi} 2\frac{dq}{d\psi}\frac{d^2q}{d\psi\,d\alpha}\sin^2\psi\,d\psi;$$

mais

$$\frac{dq}{d\alpha} = \frac{-F'(\psi - \alpha) + F'(\psi + \alpha)}{2\sin\psi},$$

qui est nul pour $\alpha = 0$.

Donc la courbe de surface maximum est la courbe proposée elle-même pour laquelle $2\varphi = \pi$; cette courbe est égale à sa réduite.

Note. — Solution analogue par M. Chabanel.

Questions 1163 *et* 1164

(voir 2e série, t. XIV, p. 143 et 144);

PAR M. PELLISSIER.

1163. *On nomme transformations biquadratiques toutes celles dans lesquelles à un point de chacune des deux figures conjuguées correspond un point, et à une droite, une conique. Montrer que les deux angles des asymptotes de cette conique sont toujours mesurés par la moitié des deux arcs suivant lesquels la droite divise le cercle fixe des trois points fondamentaux de la trans-*

formation. On obtient une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que la droite est extérieure à ce cercle, qu'elle le coupe ou qu'elle lui est tangente.

(Haton de la Goupillière.)

Soient P (x, y, z) et P' (x', y', z') deux points correspondants. La transformation sera biquadratique si l'on pose

$$x' : y' : z' = U : V : W,$$

où U, V, W sont des fonctions du deuxième degré en x, y, z, qui représentent des coniques ayant trois points communs.

En effet, à une droite correspond alors une conique, et à un point correspond un point et un seul.

D'ailleurs, si, au lieu des coniques U, V, W, nous choisissions trois coniques de la forme $lU + mV + nW$, en prenant pour nouvelles lignes de référence les droites correspondantes $lx + my + nz$, cela reviendrait simplement à un changement de coordonnées. Nous conserverons donc la même généralité en prenant pour U, V, W les trois couples de droites obtenues en joignant chacun des points fixes aux deux autres.

Ainsi, en prenant pour triangle de référence le triangle des trois points fixes (points fondamentaux), la transformation sera exprimée par les relations réciproques

$$x : y : z = y'z' : z'x' : x'y',$$
$$x' : y' : z' = yz : zx : xy;$$

et si l'on joint aux sommets du triangle fondamental les points conjugués P et P', dont les coordonnées satisfont à ces relations, les droites ainsi obtenues feront deux à deux des angles égaux avec les côtés de ce triangle (*voir* Salmon, *Higher plane Curves*, 2e édition, articles 283

et 344). C'est cette propriété qui va nous donner la solution des questions nos 1163 et 1164.

Soient ABC (*) le cercle fixe des trois points fondamentaux de la transformation, et MN une droite qui coupe ce cercle en M et N. La figure conjuguée de cette droite est une conique qu'il est facile de construire par points.

Considérons spécialement le point M et cherchons le point de la conique qui lui correspond. Pour cela, joignons MB et faisons en B l'angle $\widehat{CBD}$ égal à $\widehat{MBA}$, puis joignons MC et faisons $\widehat{EBC} = \widehat{MCA}$; le point cherché doit être à l'intersection des droites BD et CE. Or ces deux lignes sont parallèles, puisque $\widehat{MBA} = \widehat{MCA}$; donc le point correspondant de M est le point de la conique situé à l'infini dans la direction BD. On verrait de même que le point correspondant de N est le point de la conique à l'infini dans la direction BD′, telle que la droite BD′ fasse avec BC le même angle que BN fait avec BA. L'angle DBD′ n'est donc autre que l'angle des asymptotes de la conique, et il est visiblement égal à MBN, puisque l'on a

$$\widehat{CBD} = \widehat{MBA} \quad \text{et} \quad \widehat{CBD'} = \widehat{NBA}.$$

Cet angle a pour mesure la moitié de l'arc MAN, et l'angle supplémentaire la moitié de l'arc MBCN.

Lorsque la droite est extérieure au cercle, la conique conjuguée a tous ses points à distance finie, c'est une ellipse. Si la droite coupe le cercle en deux points, nous venons de voir que la conique est une hyperbole, puisqu'elle s'en va à l'infini dans deux directions différentes ; enfin, si la droite est tangente, elle a évidemment pour conjuguée une parabole.

(*) Le lecteur est prié de faire les figures.

1164. *Montrer que, dans tout procédé biquadratique, la condition nécessaire et suffisante pour obtenir un cercle est de transformer un cercle mené par deux des points fondamentaux. Le conjugué y passe alors lui-même. Les deux séries de centres de ces cercles forment un système en involution sur la perpendiculaire élevée au milieu de la droite qui joint ces deux points. Son centre est celui du cercle des trois points fondamentaux, et ses foyers les points où ce cercle rencontre la droite.*

Lorsque l'on prend pour points fondamentaux les ombilics du plan, il suffit d'après cela de partir d'un cercle quelconque pour en obtenir un autre, et, en effet, ce mode spécial de transformation biquadratique n'est autre que le procédé des rayons vecteurs réciproques.

(Haton de la Goupillière.)

Soit P un point pris sur un cercle qui passe aux deux points fondamentaux A et B. Pour avoir son correspondant, il suffit de joindre PA et de faire l'angle $\widehat{BAP'} = \widehat{CAP}$, puis de joindre PB et de faire l'angle $\widehat{ABP'} = \widehat{CBP}$; les deux droites AP', BP' se coupent au point cherché P'. Or on a immédiatement

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \widehat{AP'B} = 180 - (\widehat{P'AB} + \widehat{P'BA}), \\ \widehat{AP'B} = 180 - (\widehat{PAC} + \widehat{PBC}), \\ \widehat{AP'B} = 180 - (\widehat{APB} - \widehat{ACB}). \end{array}\right.$$

L'angle AP'B étant constant, le lieu de P' est un cercle qui passe aux points A et B.

Réciproquement, pour que ce lieu de P' soit un cercle, il faut que l'angle AP'B soit constant, et alors, à cause de la relation (1), l'angle $\widehat{APB}$ est aussi constant, c'est-à-

dire que le point P est sur un cercle qui passe par A et B. La condition est donc nécessaire et suffisante.

Il y a cependant une exception pour le cercle des trois points fondamentaux. Ce cercle correspond à la droite de l'infini ; car, si l'on cherche le conjugué d'un point quelconque p de ce cercle, on trouve qu'il est déterminé par l'intersection de deux droites parallèles et par conséquent situé à l'infini.

Considérons maintenant le cercle des points P et le cercle conjugué qui est le cercle des points P' : soient O, O' leurs centres et ω le centre du cercle circonscrit au triangle fondamental ABC ; ces trois points sont situés sur la perpendiculaire au milieu de AB, laquelle rencontre le cercle ω aux points f et f'. Joignons ωA, OA, O'A : les deux triangles ωOA, ωO'A ont l'angle en ω commun ; de plus, les angles ωOA, ωAO' sont égaux. En effet, l'angle ωOA est égal à 180 — APB, puisque, dans le cercle O, il a pour mesure la moitié de l'arc APB, et l'angle ωAO' est celui sous lequel se coupent les cercles ω, O' (segments capables des angles ACB et AP'B décrits sur AB), c'est-à-dire qu'il est égal à

$$180 - (\widehat{APB} - \widehat{ACB}) - \widehat{ACB} \quad \text{ou à} \quad 180 - \widehat{APB}.$$

Les triangles ωOA et ωO'A sont donc semblables et donnent

$$\frac{O\omega}{\omega A} = \frac{\omega A}{O'\omega},$$

ou bien

$$O\omega \,.\, O'\omega = \overline{\omega A}^2,$$

ou encore, puisque $\omega f = \omega f' = \overline{\omega A}^2$,

$$O\omega \,.\, O'\omega = \overline{\omega f}^2 = \overline{\omega f'}^2.$$

Par conséquent, les points O, O' font partie d'une involution dont ω est le point central et f, f' les foyers.

La dernière partie de l'énoncé est évidente, si l'on se rappelle que tous les cercles du plan passent par les ombilics (points circulaires à l'infini).

Question 1184
(voir 2e série, t. XIV, p. 432);

PAR M. PRAVAZ,
Professeur au Collége de Tulle.

Soit

$$(1)\quad \begin{cases} X = ax + by + cz + dt, \\ Y = a_1x + b_1y + c_1z + d_1t; \end{cases}$$

si a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1 sont des fonctions données d'un paramètre arbitraire, la droite mobile

$$X = 0,\quad Y = 0$$

engendrera une surface réglée; l'équation de la surface du second ordre passant par trois droites infiniment voisines de la surface engendrée sera

$$(2)\quad \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & d' & X & 0 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 & Y & 0 \\ a'' & b'' & c'' & d'' & 2X' & X \\ a''_1 & b''_1 & c''_1 & d''_1 & 2Y' & Y \end{vmatrix} = 0.$$

a', b', ..., a'_1, b'_1, ..., a'', b'', ..., a''_1, b''_1, ... sont les dérivées premières et secondes des fonctions a, b, ..., a_1, b_1, ..., par rapport au paramètre dont elles dépendent; X, Y sont définis par les égalités (1), et l'on a posé

$$(3)\quad \begin{cases} X' = a'x + b'y + c'z + d't, \\ Y' = a'_1x + b'_1y + c'_1z + d'_1t. \end{cases}$$

(L. PAINVIN.)

Soient

$$X = 0,$$
$$Y = 0;$$
$$X + \Delta X = 0,$$
$$Y + \Delta Y = 0;$$
$$X + 2\Delta X + \Delta^2 X = 0,$$
$$Y + 2\Delta Y + \Delta^2 Y = 0$$

les équations de trois positions infiniment voisines A, A′, A″ de la droite mobile; soit D une droite rencontrant A, A′, A″ en des points dont nous désignerons respectivement les coordonnées par x, y, z, t; $x + \Delta x, \ldots$, $x + 2\Delta x + \Delta^2 x, \ldots$; soient enfin ζ, η, ζ, τ les coordonnées courantes de D. On a

$$(5)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\xi - x}{\Delta x} &= \frac{\eta - y}{\Delta y} = \frac{\zeta - z}{\Delta z} = \frac{\tau - t}{\Delta t}, \\ \frac{\xi - x}{\Delta^2 x} &= \frac{\eta - y}{\Delta^2 y} = \frac{\zeta - z}{\Delta^2 z} = \frac{\tau - t}{\Delta^2 t}. \end{aligned} \right.$$

L'équation de la surface cherchée s'obtiendra par l'élimination, entre les équations (4) et (5), des coordonnées x, y, z, t et de leurs accroissements du premier et du second ordre.

Les équations (4), dont on réduit chaque couple au moyen des couples précédents et où l'on substitue ensuite les dérivées aux accroissements, deviennent

$$(6)\quad \left\{ \begin{aligned} X &= 0, \\ Y &= 0; \\ X' + X_{x'} &= 0 \\ Y' + Y_{x'} &= 0; \\ X'' + 2X'_{x'} + X_{x''} &= 0, \\ Y'' + 2Y'_{x'} + Y_{x''} &= 0; \end{aligned} \right.$$

en posant, pour abréger,

$$X_{x'} = ax' + by' + cz' + dt' + \ldots,$$
$$X'_{x'} = a'x' + b'y' + c'z' + d't' + \ldots.$$

Les équations (5) deviennent de même

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\xi - x}{x'} = \dfrac{\eta - y}{y'} = \dfrac{\zeta - z}{z'} = \dfrac{\tau - t}{t'} = K, \\ \dfrac{\xi - x}{x''} = \dfrac{\eta - y}{y''} = \dfrac{\zeta - z}{z''} = \dfrac{\tau - t}{t''} = K', \end{cases}$$

K et K' étant deux inconnues auxiliaires. On tire des équations (7)

$$\xi = x + Kx', \ldots,$$
$$\xi = x + K'x'', \ldots;$$

on déduit de là, en ayant égard aux équations (6),

$$X_\xi = KX_{x'}, \ldots,$$
$$X_\xi = K'X_{x''}, \ldots,$$
$$X'_\xi = -X_{x'} + KX_{x'}, \ldots;$$

d'où

$$X_{x'} = \frac{1}{K} X_\xi, \ldots,$$

$$X_{x''} = \frac{1}{K'} X_\xi, \ldots,$$

$$X'_{x'} = \frac{1}{K} X'_\xi + \frac{1}{K^2} X_\xi, \ldots.$$

D'après cela, les équations (6) deviennent

$$ax + by + cz + dt = 0,$$
$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1t = 0,$$
$$a'x + b'y + c'z + d't + \frac{1}{K} X_\xi = 0,$$
$$a'_1x + b'_1y + c'_1z + d'_1t + \frac{1}{K} Y_\xi = 0,$$
$$a''x + b''y + c''z + d''t + \frac{2}{K} X'_\xi + \left(\frac{2}{K^2} + \frac{1}{K'}\right) X_\xi = 0,$$
$$a''_1x + b''_1y + c''_1z + d''t + \frac{2}{K} Y'_\xi + \left(\frac{2}{K^2} + \frac{1}{K'}\right) Y_\xi = 0,$$

et l'élimination, entre ces équations, de x, y, z, t et des inconnues auxiliaires K et K' conduit à l'équation

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & d' & X_\xi & 0 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 & Y_\xi & 0 \\ a'' & b'' & c'' & d'' & 2X'_\xi & X_\xi \\ a''_1 & b''_1 & c''_1 & d''_1 & 2Y'_\xi & Y_\xi \end{vmatrix} = 0,$$

qui ne diffère de l'équation (2) que par la substitution des coordonnées ξ, η, ζ, τ aux coordonnées x, y, z, t.

Note. — Autre solution par M. Genty.

Question 1217

(voir 2e série, t. XV, p. 336),

PAR M. R.-W. GENESE,

M. A. du collège de Saint-Jean, Cambridge, Angleterre.

Si

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = 0$$

est l'équation d'une conique, et A, B, C *les angles que l'un des axes de la courbe fait avec les côtés du triangle de référence, on a*

$$a\sin 2A + b\sin 2B + c\sin 2C$$
$$+ 2f\sin(B + C) + 2g\sin(C + A) + 2h\sin(A + B) = 0.$$

(A. CAMBIER.)

Il faudra trouver l'équation des bissectrices des angles de deux droites données. Je donnerai ici pour y arriver une méthode qui présente plusieurs avantages.

Soient X'OX, Y'OY deux droites coupées par un cercle de centre O. Les cordes d'intersection sont parallèles aux bissectrices de l'angle XOY. De plus, si le rayon du cercle est nul, les cordes *coïncideront* avec les bissectrices.

Soit

$$ax^2 + by^2 + 2hxy = 0$$

l'équation des droites; le cercle sera représenté par

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos\omega = 0.$$

Alors, λ étant choisi de manière que le premier membre soit un carré,

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + \lambda\,(x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega) = 0$$

représentera les bissectrices. λ est déterminé par la relation

$$(a+\lambda)\,(b+\lambda) = (h + \lambda\cos\omega)^2.$$

En multipliant l'équation par $a+\lambda$ et prenant la racine carrée, on a

$$(a+\lambda)\,x + (h+\lambda\cos\omega)\,y = 0$$

pour l'équation d'une des bissectrices; et, de la même manière,

$$(b+\lambda)\,y + (h+\lambda\cos\omega)\,x = 0,$$

pour l'équation de l'autre.

En éliminant λ, l'équation des bissectrices est

$$\frac{ax+hy}{by+hx} = \frac{x+y\cos\omega}{y+x\cos\omega}.$$

Maintenant, soit LMN le triangle de référence. Les coordonnées des points de la courbe à l'infini sont liées par l'équation

$$\alpha\sin L + \beta\sin M + \gamma\sin N = 0.$$

En éliminant α entre cette équation et

$$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + 2f\beta\gamma + 2g\gamma\alpha + 2h\alpha\beta = 0,$$

nous aurons l'équation de deux droites parallèles aux asymptotes de la courbe

$$R\beta^2 + Q\gamma^2 + 2P'\beta\gamma = 0,$$

où

$$R = a\sin^2 M + b\sin^2 L - 2h\sin L\sin M,$$
$$Q = a\sin^2 N + c\sin^2 L - 2g\sin L\sin N,$$
$$P' = a\sin M\sin N + f\sin^2 L - g\sin L\sin M - h\sin L\sin N.$$

Les bissectrices des angles de ces droites sont parallèles aux axes; leur équation est

$$\frac{R\beta + P'\gamma}{Q\gamma + P'\beta} = \frac{\beta + \gamma\cos L}{\gamma + \beta\cos L}.$$

Mais l'un des axes fait des angles A, B, C avec les côtés de LMN; en conséquence

$$\beta : \gamma = \sin B : \sin C.$$

On a aussi

$$\pi - N = B - A,$$
$$\pi - L = C - B,$$
$$\pi - M = 2\pi - (C - A);$$

ainsi

$$\sin L : \sin M : \sin N = \sin(B - C) : \sin(C - A) : \sin(A - B).$$

Alors

$$\frac{R\sin B + P'\sin C}{Q\sin C + P'\sin B} = \frac{\sin B - \sin C\cos(B - C)}{\sin C - \sin B\cos(B - C)}$$

$$= \frac{\cos C\sin(B - C)}{-\cos B\sin(B - C)},$$

ou

$$R\sin 2B + Q\sin 2C + 2P'\sin(B + C) = 0.$$

En remplaçant R, Q, P′ par leurs valeurs, la relation devient divisible par $\sin^2(B - C)$, et le résultat de M. Cambier est vérifié.

Note. — La même question a été résolue par MM. Moret-Blanc; L. Goulin, élève du lycée de Rouen; Chabanel; A. Minozzi, à Naples.

QUESTIONS.

1218. Pour tout nombre impair p, on peut poser

$$p = P + Q + R + S,$$
$$p^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2,$$

P, Q, R, S étant des entiers, dont trois ont une somme algébrique égale à un carré. (S. Realis.)

1219. Pour tout nombre entier p, de l'une des formes

$$4n + 1, \quad 4n + 2, \quad 8n + 3,$$

on peut poser

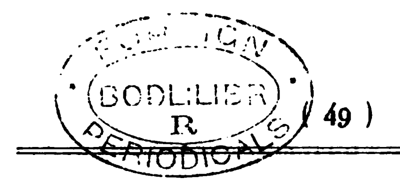
$$p = P + Q + R + S,$$
$$p^2 = P^2 + Q^2 + R^2 + S^2,$$

P, Q, R, S étant des entiers, tels que la somme algébrique

$$P + Q + R + 3S$$

est égale à un carré. (S. Realis.)

1220. On a un certain nombre de cercles dans l'espace; des mobiles les parcourent avec des vitesses angulaires égales; leur centre de gravité décrit une ellipse qui a pour centre le centre de gravité des centres des cercles donnés. (Genty.)



SUR LES DÉBUTS DE LA TRIGONOMÉTRIE ;

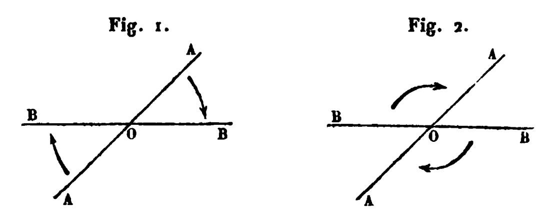
PAR M. CH. BRISSE.

Des angles.

1. Deux droites qui se coupent déterminent quatre angles, deux à deux égaux et opposés par le sommet. On a trouvé utile de distinguer ces angles, et l'on y est parvenu à l'aide des conventions suivantes :

L'angle d'une droite indéfinie AA (*fig.* 1) *avec une droite indéfinie* BB *est celui dont il faut faire tourner* AA, *autour de son point de rencontre* O *avec* BB, *dans le sens des aiguilles d'une montre, pour l'appliquer sur* BB.

Fig. 1. Fig. 2.



L'angle de la droite indéfinie BB (*fig.* 2) avec la droite indéfinie AA est celui dont il faut faire tourner BB, dans le sens des aiguilles d'une montre, pour l'appliquer sur AA.

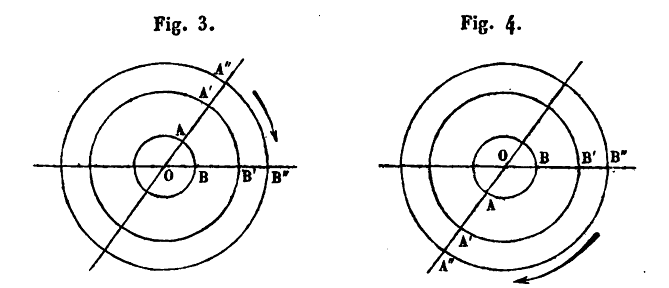
De sorte que l'angle de AA avec BB n'est pas égal à celui de BB avec AA.

Dans cet ordre d'idées, on a remarqué que la droite AA (*fig.* 1), se trouvant appliquée sur BB, s'y trouvait encore appliquée, si l'on continuait à la faire tourner, après un demi-tour, deux demi-tours, etc. De sorte qu'en

appelant angle de AA avec BB la quantité dont il faut faire tourner AA, dans le sens des aiguilles d'une montre, pour l'appliquer sur BB, le mot *angle* prend une extension qu'il n'avait pas en Géométrie et se trouve défini, mais seulement à un nombre entier de demi-tours près.

La même remarque est applicable à l'angle de BB (*fig.* 2) avec AA.

Observant maintenant que, si l'on décrit du point O (*fig.* 3 et 4) une série de cercles concentriques, le rap-



port des arcs interceptés sur ces cercles par les côtés d'un angle à leurs rayons respectifs est indépendant des rayons, on a pris ce rapport pour mesure de l'angle; de sorte que le demi-tour, correspondant à une demi-circonférence, s'est trouvé exprimé par le nombre π.

L'angle de deux droites indéfinies AA *et* BB *est donc complétement déterminé à un multiple près de* π.

Dans certains cas, on a trouvé plus commode de tourner en sens contraire des aiguilles d'une montre. Pour distinguer ce cas du précédent, on a fait la convention suivante :

Quand une droite AA fait avec une droite BB un angle α, c'est qu'on peut amener la première sur la seconde en tournant de α dans le sens des aiguilles d'une

montre; mais, si l'on dit qu'une droite AA fait avec une droite BB un angle $-\alpha$, c'est qu'on peut amener la première sur la seconde en tournant de α *en sens contraire* des aiguilles d'une montre.

Ainsi (*fig.* 1 et 2), l'angle de AA avec BB étant α, on peut dire que celui de BB avec AA est $-\alpha$.

En faisant un demi-tour en sens contraire des aiguilles d'une montre, on tourne donc de $-\pi$, et comme, lorsqu'une droite est appliquée sur une autre, un demi-tour dans un sens ou dans l'autre l'y ramène, on peut dire que *l'angle de deux droites indéfinies est complétement déterminé, à un multiple près positif ou négatif de* π.

2. Si, au lieu de deux droites indéfinies, on donne deux droites parcourues dans un sens déterminé, c'est-à-dire deux *directions*, on appelle angle de la direction OA (*fig.* 5) avec la direction OB celui dont il faut faire tour-

Fig. 5.

Fig. 6.

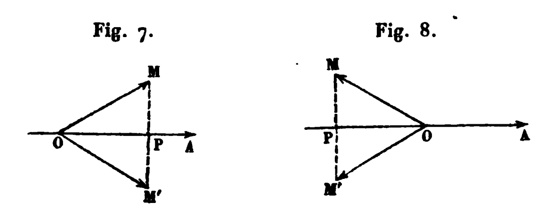
ner OA, dans le sens des aiguilles d'une montre, pour l'appliquer sur OB, et angle de la direction OB (*fig.* 6) avec la direction OA celui dont il faut faire tourner OB, dans le sens des aiguilles d'une montre, pour l'appliquer sur OA.

On peut remarquer qu'en continuant la rotation OA se trouve de nouveau appliqué sur OB, ou OB sur OA, après un tour, deux tours, etc.; de sorte que l'angle de OA avec OB, ou de OB avec OA, sera déterminé à un nombre entier de tours près, c'est-à-dire à un multiple près de 2π.

On peut également convenir qu'on désignera par des nombres négatifs les angles dont on tournera en sens contraire des aiguilles d'une montre; de sorte que *l'angle de deux directions est complétement déterminé à un multiple près positif ou négatif de* 2π.

Du cosinus.

3. Soit α l'un quelconque des angles de deux directions OM (*fig.* 7 et 8) et OA. Abaissons d'un point M,



pris sur la première direction, une perpendiculaire sur la droite qui contient la seconde direction, et soit P le pied de cette perpendiculaire. Ou le point P tombera sur la direction OA (*fig.* 7), ou il tombera sur son prolongement (*fig.* 8). Dans le premier cas, le rapport $+\frac{OP}{OM}$, et, dans le second cas, le rapport $-\frac{OP}{OM}$, c'est-à-dire le rapport $\frac{OP}{OM}$, y compris un signe dépendant de la position du point P, sera, par définition, le *cosinus* de l'angle α.

Et, comme cet angle n'est défini qu'à un multiple près de 2π, il résulte de la définition que

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos\alpha.$$

Si l'on prend le symétrique M' de M par rapport à OA, il est clair que, si, tournant dans le sens convenable sui-

vant le signe de α, on amène OM sur OA, en tournant en sens contraire, c'est-à-dire en décrivant $-\alpha$, on amènera OM′ sur OA. La position du point P étant la même pour M et pour M′, il en résulte que

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Il est clair aussi que, si l'on prolonge OM (*fig.* 9), en sens contraire, d'une longueur égale à lui-même, le pied P de la perpendiculaire correspondante tombera, par rapport à O, du côté opposé au pied de la première; de sorte que le rapport $\frac{OP}{OM}$ ne changera pas de valeur numérique, mais que, le point P passant de OA sur son prolonge-

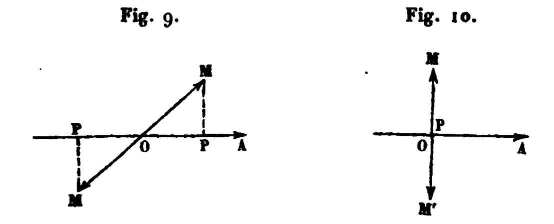


Fig. 9. Fig. 10.

ment, ou *vice versa*, le cosinus changera de signe. Or on passe de OM à son prolongement en tournant d'un nombre quelconque positif ou négatif de demi-tours; donc

$$\cos[(2k+1)\pi + \alpha] = -\cos\alpha,$$

et, en changeant α en $-\alpha$,

$$\cos[(2k+1)\pi - \alpha] = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha.$$

Si le point P (*fig.* 10) tombait en O, le rapport $\frac{OP}{OM}$ serait nul, et, comme on amènerait alors OM sur OA en tournant d'un quart de tour ou de $\frac{\pi}{2}$, et OM′ sur OA en

tournant de $-\frac{\pi}{2}$, à un multiple près de 2π, il en résulte

$$\cos\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

D'ailleurs on passe de OM à OM', ou inversement, en tournant d'un nombre quelconque positif ou négatif de demi-tours; donc

$$\cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos\left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Enfin, OM (*fig.* 9) étant une oblique et OP une perpendiculaire par rapport à MP, la valeur absolue du rapport $\frac{\text{OP}}{\text{OM}}$ est nécessairement comprise entre zéro et 1, de sorte que le cosinus ne peut prendre que des valeurs comprises entre $+1$ et -1. Les points M et P se confondant quand OM coïncide avec OA ou avec son prolongement, c'est-à-dire quand l'angle est égal à $2k\pi$ ou à $(2k+1)\pi$, on a

$$\cos 2k\pi = 1, \quad \cos(2k+1)\pi = -1.$$

Des projections.

4. Considérons une direction fixe ZZ (*fig.* 11) et un

Fig. 11.

segment limité de droite AM parcouru dans le sens AM, la direction ZZ et le segment AM étant ou non dans

un même plan. Par l'origine A du segment, menons une parallèle AX à la direction fixe, et abaissons de son extrémité M une perpendiculaire MP sur AX. Soit α l'un quelconque des angles que fait AM avec AX, quand on se place d'un certain côté du plan MAX, cet angle étant $-\alpha$ si l'on se place de l'autre côté, puisqu'on voit alors tourner les aiguilles d'une montre en sens contraire. Que l'on soit d'un côté ou de l'autre, puisque $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, on a, si P tombe sur AX,

$$+\frac{AP}{AM} = \cos\alpha,$$

et, s'il tombe sur son prolongement,

$$-\frac{AP}{AM} = \cos\alpha;$$

d'où l'on conclut, dans le premier cas,

$$+AP = AM\cos\alpha,$$

et, dans le second,

$$-AP = AM\cos\alpha.$$

Ce produit de la *valeur absolue* de AM par le cosinus de l'angle que fait la direction AM avec la direction AX est, par définition, *la projection de* AM *sur cette direction*.

Soit O une origine située suffisamment loin vers la gauche pour que les pieds P de toutes les perpendiculaires qu'il y aura lieu de considérer tombent tous à sa droite, et proposons-nous, un mobile cheminant sur la direction AM, d'évaluer à chaque instant la distance OP de sa projection au point O, connaissant la distance primitive OA de son point de départ.

On aura, dans le premier cas, si P tombe sur AX,

$$OP = OA + AP \quad \text{ou} \quad OP = OA + AM\cos\alpha,$$

puisque

$$+\,\mathrm{AP} = \mathrm{AM}\cos\alpha,$$

et, dans le second, s'il tombe sur son prolongement,

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OA} - \mathrm{AP} \quad \text{ou} \quad \mathrm{OP} = \mathrm{OA} + \mathrm{AM}\cos\alpha,$$

puisque

$$-\,\mathrm{AP} = \mathrm{AM}\cos\alpha;$$

c'est-à-dire que, dans tous les cas, *la distance au point* O *de la projection du point* M *est égale à sa distance primitive augmentée de la projection de* AM.

Il est clair qu'au lieu de mener par le point A une parallèle à ZZ et d'abaisser du point M une perpendiculaire sur cette parallèle, on peut, des points O, A et M, mener des plans perpendiculaires à ZZ (*fig.* 12); car,

Fig. 12.

d'abord, l'angle de deux directions est indépendant de leur position, et ensuite *oa* et OA, *ap* et AP, *op* et OP sont égales comme parallèles comprises entre plans parallèles, de sorte qu'on a toujours

$$op = oa + \mathrm{AM}\cos\alpha \quad \text{ou} \quad op = oa + \text{proj. de AM}.$$

Cela posé, considérons un polygone fermé quelconque, plan ou gauche, ayant $\mathrm{A}, \mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_{m-1}$ pour sommets, et parcourons-le dans le sens $\mathrm{A}\mathrm{A}_1 \ldots \mathrm{A}_{m-1}\mathrm{A}$, de manière à revenir au point de départ. Projetons à chaque instant le point décrivant sur ZZ; quand il coïncidera

successivement avec les différents sommets du polygone, la distance au point o de sa projection sera successivement

$$oa,\ oa + \text{proj. de } AA_1,\ oa + \text{proj. de } AA_1 + \text{proj. de } AA_2,\ \ldots,$$
$$oa + \text{proj. de } AA_1 + \ldots + \text{proj. de } A_{n-1}A.$$

Mais, puisqu'on est revenu au point de départ A, la projection est revenue à son point de départ a, et elle est à la distance oa du point o; donc

$$oa + \text{proj. de } AA_1 + \text{proj. de } A_1A_2 + \ldots + \text{proj. de } A_{n-1}A = oa,$$

d'où

$$\text{proj. de } AA_1 + \text{proj. de } A_1A_2 + \ldots + \text{proj. de } A_{n-1}A = 0,$$

c'est-à-dire que *la somme des projections d'un polygone fermé quelconque, plan ou gauche, parcouru dans un certain sens, sur une direction fixe, est égale à zéro.*

C'est dans cette proposition que consiste le *théorème des projections.*

Du sinus.

5. Comme première application du théorème des projections, soit, dans un plan, α l'un quelconque des angles de deux directions OM et OA. Abaissons d'un point M, pris sur la première direction, une perpendiculaire sur la droite qui contient la seconde direction, et soit P le pied de cette perpendiculaire. Projetons le contour fermé OPMO sur une direction OL faisant avec OA un angle égal à $\frac{\pi}{2}$.

Le point P tombant sur OA ou sur son prolongement, OP fait avec OL un angle égal à $-\frac{\pi}{2}$ ou à $+\frac{\pi}{2}$; mais

$\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = 0$; donc sa projection $OP\cos\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$ est nulle.

PM étant perpendiculaire sur OA fait avec elle un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$ ou à $-\frac{\pi}{2}$. Pour trouver l'angle de PM avec OL, ramenons d'abord PM sur OA en tournant de $+\frac{\pi}{2}$ ou de $-\frac{\pi}{2}$, puis OA sur OL en tournant de $-\frac{\pi}{2}$; l'angle cherché sera $+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire 0 ou $-\pi$. La projection de PM sera donc $PM\cos 0$ ou $PM\cos(-\pi)$, c'est-à-dire $+PM$ ou $-PM$.

MO étant dirigée en sens inverse de OM fait avec elle un angle égal à π. Pour trouver l'angle de MO avec OL, ramenons d'abord MO sur OM en tournant de π, puis OM sur OA en tournant de α, puis OA sur OL en tournant de $-\frac{\pi}{2}$; l'angle cherché sera $\pi+\alpha-\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}+\alpha$. La projection de MO sera donc

$$MO\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) \quad \text{ou} \quad -MO\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

La somme des projections étant nulle, il en résulte

$$+PM - MO\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 0,$$

ou

$$-PM - MO\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 0.$$

Les angles α et $\frac{\pi}{2}-\alpha$, dont la somme algébrique est égale à $\frac{\pi}{2}$, sont dits *complémentaires*, et le cosinus du complément d'un angle est dit le *sinus* de cet angle; de

sorte que l'on a, par définition,

$$\sin\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right),$$

et que les relations précédentes deviennent

$$+\frac{\text{PM}}{\text{MO}} = \sin\alpha \quad \text{ou} \quad -\frac{\text{PM}}{\text{MO}} = \sin\alpha,$$

suivant que PM fait avec OA un angle égal à $+\frac{\pi}{2}$ ou à $-\frac{\pi}{2}$. Le rapport $\frac{\text{PM}}{\text{MO}}$, y compris un signe dépendant de l'angle que fait la direction PM avec la direction OA, sera donc le sinus de l'angle α.

En changeant, dans les différentes formules établies pour le cosinus, α en $\frac{\pi}{2} - \alpha$, on obtient les suivantes :

$$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin\alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\sin[(2k+1)\pi + \alpha] = -\sin\alpha, \quad \sin[(2k+1)\pi - \alpha] = \sin\alpha,$$

$$\sin k\pi = 0, \quad \sin\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \sin\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Des formules d'addition.

6. Comme deuxième application du théorème des projections, soient, dans un plan, a l'un quelconque des angles de deux directions OM et OA, b celui d'une nouvelle direction ON avec OM. Abaissons d'un point N, pris sur la direction ON, une perpendiculaire sur la droite qui contient la direction OM, et soit P le pied de cette perpendiculaire. Projetons le contour fermé OPNO sur la direction OA.

Si le point P tombe sur OM, la valeur absolue de OP est ON $\cos b$, d'après la définition du cosinus; OP fait

alors avec OA le même angle que OM, c'est-à-dire l'angle a, de sorte que sa projection est $\mathrm{ON}\cos b\cos a$.

Si le point P tombe sur le prolongement de OM, la valeur absolue de OP est $-\mathrm{ON}\cos b$. Pour trouver l'angle de OP avec OA, ramenons d'abord OP sur OM en tournant de π, puis OM sur OA en tournant de a; l'angle cherché sera $\pi + a$. La projection de OP sera donc $-\mathrm{ON}\cos b\cos(\pi + a)$ ou $\mathrm{ON}\cos b\cos a$, comme précédemment.

Si PN fait avec OM un angle égal à $\frac{\pi}{2}$, sa valeur absolue est $\mathrm{ON}\sin b$, d'après ce qu'on a vu pour le sinus. Pour trouver l'angle de PN avec OA, ramenons d'abord PN sur OM en tournant de $\frac{\pi}{2}$, puis OM sur OA en tournant de a; l'angle cherché sera $\frac{\pi}{2} + a$. La projection de PN sera donc $\mathrm{ON}\sin b\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)$ ou $-\mathrm{ON}\sin b\sin a$.

Si PN fait avec ON un angle égal à $-\frac{\pi}{2}$, sa valeur absolue est $-\mathrm{ON}\sin b$. Pour trouver l'angle de PN avec OA, ramenons d'abord PN sur OM en tournant de $-\frac{\pi}{2}$, puis OM sur OA en tournant de a; l'angle cherché sera $-\frac{\pi}{2} + a$. La projection de PN sera donc

$$-\mathrm{ON}\sin b\cos\left(-\frac{\pi}{2} + a\right) \quad \text{ou} \quad -\mathrm{ON}\sin b\sin a,$$

comme précédemment.

NO étant dirigée en sens inverse de ON fait avec elle un angle égal à π. Pour trouver l'angle de NO avec OA, ramenons d'abord NO sur ON en tournant de π, puis ON sur OM en tournant de b, puis OM sur OA en tournant

de a; l'angle cherché sera $\pi + b + a$. La projection de NO sera donc ON $\cos(\pi + b + a)$ ou $-$ ON $\cos(b + a)$.

La somme des projections étant nulle, il en résulte

$$\text{ON} \cos b \cos a - \text{ON} \sin b \sin a - \text{ON} \cos(b + a) = 0,$$

ou

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Changeons b en $-b$,

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

Changeons maintenant a en $\frac{\pi}{2} - a$,

$$\cos\left[\frac{\pi}{2} - (a + b)\right] = \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

Changeons enfin b en $-b$,

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

(*A suivre.*)

SUR UNE MÉTHODE DE VARIATION DES PARAMÈTRES DANS LES INTÉGRALES INDÉFINIES;

PAR M. ANDREIEWSKY,
Professeur à l'Université de Varsovie.

1. Les principes connus de la méthode de la variation des constantes arbitraires peuvent être appliqués aux paramètres des intégrales indéfinies, et nous allons montrer comment, à l'aide de cette application, on pourra déduire des intégrales connues les valeurs des intégrales d'autres fonctions, en général, plus compliquées, puisque, au lieu des paramètres, elles contiendront des fonctions de la variable.

2. En premier lieu, je remarquerai qu'en admettant, comme choses connues, la différentiation de la puissance entière et positive de la variable et le théorème sur les dérivées des fonctions composées, il sera facile d'en déduire, au moyen de la variation des paramètres, toutes les règles fondamentales du Calcul différentiel.

Considérons, pour cela, une fonction $F(x, a)$ de la variable x et du paramètre a, ayant pour dérivée, par rapport à x,

$$\frac{\partial F(x, a)}{\partial x} = f(x, a).$$

Si a dépendait de x, la dérivée complète de $F(x, a)$, par rapport à x, s'exprimerait ainsi :

$$\frac{dF(x, a)}{dx} = f(x, a) + \frac{\partial F}{\partial a}\frac{da}{dx},$$

et, en déterminant a de manière que l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0$$

soit satisfaite, on aura de nouveau

$$\frac{dF(x, a)}{dx} = f(x, a).$$

3. Cela posé, soit

$$F(x, a) = ax^n - \frac{a^2}{4}x^{3n},$$

n désignant un nombre entier et positif. On aura d'abord

$$\frac{\partial F(x, a)}{\partial x} = nax^{n-1} - \frac{3na^2}{4}x^{3n-1},$$

et, en substituant dans les deux membres de cette for-

mule la valeur de a, satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial a} = x^n - \frac{a}{2} x^{3n} = 0,$$

c'est-à-dire

$$a = 2x^{-2n},$$

on obtiendra

$$\frac{dx^{-n}}{dx} = -nx^{-n-1}.$$

4. Pour déduire maintenant la dérivée d'une puissance fractionnaire, faisons

$$F(x, a) = \frac{m-1}{m} a + \frac{a^{1-m}}{m} x^m,$$

m et n désignant des nombres entiers, et remplaçons, dans les deux membres de l'équation

$$\frac{\partial F(x, a)}{\partial x} = \frac{n}{m} a^{1-m} x^{n-1},$$

a par sa valeur

$$a = x^{\frac{n}{m}},$$

tirée de

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \frac{m-1}{m} + \frac{1-m}{m} a^{-m} x^n = 0,$$

il s'ensuivra

$$\frac{dx^{\frac{n}{m}}}{dx} = \frac{n}{m} x^{\frac{n}{m}-1}.$$

5. Après avoir établi la règle de différentiation des puissances quelconques, il suffira, pour déduire la dérivée du produit, de poser

$$F(x, a) = au^{\frac{1}{2}} - \frac{a^2}{4} v^{-1},$$

u et v désignant deux fonctions de x ne renfermant pas

a. En éliminant alors a entre les équations

$$\frac{\partial F(x,a)}{\partial x} = \frac{a}{2} u^{-\frac{1}{2}} u' + \frac{a^2}{4} v^{-2} v', \quad \frac{\partial F}{\partial a} = u^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{2} v^{-1} = 0,$$

on aura

$$\frac{d(uv)}{dx} = uv' + vu'.$$

En partant de l'expression

$$F(x,a) = au^{\frac{1}{2}} - \frac{a^2}{4} v,$$

on déduira, de même, la dérivée du quotient $\frac{u}{v}$.

6. Considérons maintenant les intégrales indéfinies renfermant un certain nombre de paramètres. Admettons que l'intégrale de l'expression $f(x, a, b, c, \ldots) dx$, où $a, b, c, \ldots$ désignent des paramètres, soit connue, et qu'on ait

$$(1) \quad \int f(x, a, b, c, \ldots) dx = F(x, a, b, c, \ldots) + \text{const.}$$

Je dis que cette équation subsistera encore, si les constantes $a, b, c, \ldots$ y sont remplacées par des fonctions de la variable x, liées entre elles par une certaine relation.

En effet, remarquons pour cela que, $a, b, c, \ldots$ étant des fonctions de x, on pourra traiter toutes les grandeurs $a, b, c, \ldots$ comme fonctions de l'une d'entre elles, par exemple de a.

Cela posé, si l'on différentie (1) par rapport à x, d'abord dans l'hypothèse de $a, b, c, \ldots$ constants, on aura

$$f(x, a, b, c, \ldots) = \frac{\partial F(x, a, b, c, \ldots)}{\partial x}.$$

Or il est clair que cette dernière équation et, par con-

séquent, l'équation (1) conserveront la même forme, si l'on y remplace a, b, c,... par des fonctions de x annulant la dérivée totale de $F(x, a, b, c, \ldots)$ par rapport à a, c'est-à-dire satisfaisant à l'équation

$$(2) \qquad \frac{dF}{da} = \frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b}\frac{db}{da} + \frac{\partial F}{\partial c}\frac{dc}{da} + \ldots = 0.$$

En posant maintenant

$$b = \varphi(a), \quad c = \psi(a), \quad \ldots,$$

où les caractéristiques φ, ψ,... peuvent être quelconques, on aura l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial a} + \frac{\partial F}{\partial b}\varphi'(a) + \frac{\partial F}{\partial c}\psi'(a) + \ldots = 0,$$

pour déterminer a en fonction de x.

Ainsi, de la valeur connue de l'intégrale (1), on déduira les valeurs d'autres intégrales, où les paramètres a, b, c,... seront remplacés par des fonctions de x.

Pour que les intégrales ainsi obtenues ne contiennent que des fonctions explicites, il faudra que l'équation (2) soit résoluble par rapport à a, ce qui aura lieu, entre autres, pour certaines formes algébriques, exponentielles et trigonométriques de la fonction

$$f(x, a, b, c, \ldots).$$

7. En intégrant la puissance $m^{ième}$ d'une fonction linéaire $\alpha a x + b$, où a et b désignent des paramètres, α un nombre quelconque indépendant de a et b, on a

$$(3) \qquad \int (\alpha a x + b)^m dx = \frac{(\alpha a x + b)^{m+1}}{(m+1)\alpha a} + \text{const.}$$

Dans ce cas, l'équation (2) s'écrira ainsi

$$(4) \qquad m\alpha a x + (m+1)a\frac{db}{da} - b = 0.$$

Par conséquent, d'après ce qui a été dit, la formule (3) aura lieu, non-seulement pour des valeurs constantes de a, b, mais aussi pour toutes fonctions de x liées entre elles par la relation (4).

Posons, par exemple, $b = a^n + \beta$, où β est un nombre indépendant de a; les égalités (3) et (4) deviendront

$$\int\left[ax + \frac{n\beta}{(n-1)\alpha}\right]^m dx$$
$$= \frac{n-1}{mn+n-1}\left[ax + \frac{n\beta}{(n-1)\alpha}\right]^{m+1}\frac{1}{a} + \text{const.},$$
$$a^n + \frac{m\alpha x}{mn+n-1}a - \frac{\beta}{mn+n-1} = 0,$$

et, en remplaçant $\frac{m\alpha}{mn+n-1}$ par α et $\frac{\beta}{mn+n-1}$ par β, il vient

$$\int\left[ax - \frac{mn\beta}{(n-1)\alpha}\right]^m dx$$
$$= \frac{n-1}{mn+n-1}\left[ax - \frac{mn\beta}{(n-1)\alpha}\right]^{m+1}\frac{1}{a} + \text{const.},$$

où a vérifie l'équation

$$a^n + \alpha x a + \beta = 0.$$

Si l'on fait, dans ces dernières formules,

$$\alpha = n, \quad \beta = -(n-1)\delta,$$

on aura

$$(5) \qquad \int(ax + m\delta)^m dx = \frac{n-1}{mn+n-1}\,\frac{(ax+m\delta)^{m+1}}{a},$$

pour a satisfaisant à l'équation

$$a^n + nxa - (n-1)\delta = 0.$$

La résolution de cette dernière équation ne présente aucune difficulté dans les cas de $n = 2, 3$, et l'on trouve ainsi les valeurs des intégrales

$$\int (x\sqrt{x^2+\delta} - x^2 + m\delta)^m dx$$
$$= \frac{1}{2m+1} \frac{(x\sqrt{x^2+\delta} - x^2 + m\delta)^{m+1}}{\sqrt{x^2+\delta} - x},$$

$$\int (ax + m\delta)^m dx = \frac{2}{3m+2} \frac{(ax+m\delta)^{m+1}}{a},$$

où

$$a = \sqrt[3]{\delta + \sqrt{x^3+\delta^2}} + \sqrt[3]{\delta - \sqrt{x^3+\delta^2}}.$$

Dans la formule (5), l'exposant m peut recevoir des valeurs quelconques, à l'exception de -1 et $\frac{1-n}{n}$; les deux dernières formules deviennent illusoires respectivement pour $m = -1, -\frac{1}{2}$ et $m = -1, -\frac{2}{3}$.

8. Dans un Mémoire remarquable *Sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique* (*Journal de l'École Polytechnique*, XXII[e] Cahier), M. Liouville a démontré que l'intégration des fonctions, qu'il nomme *fonctions irrationnelles de première espèce*, quand elle est possible algébriquement, dépend de ce théorème général :

Si l'intégrale $\int \frac{M\,dx}{\sqrt[\mu]{T}}$, M *et* T *étant des fonctions entières de* x, *a une valeur algébrique, cette valeur sera nécessairement de la forme*

$$(6) \qquad \int \frac{M\,dx}{\sqrt[\mu]{T}} = \frac{\Theta}{\sqrt[\mu]{T}} + \text{const.},$$

où Θ *désigne une fonction entière de* x.

Supposons maintenant que la fonction F renferme un certain nombre de paramètres a, b, c, ..., et que Θ ne dépende pas de ces derniers; alors l'équation (2), relative aux paramètres a, b, c, ... de T, prendra cette forme simple

$$(7) \qquad \frac{d\text{T}}{da} = 0.$$

En introduisant ensuite dans (6), au lieu de a, b, c, ..., des fonctions de x, au moyen de la dernière équation, comme il a été expliqué (6), on déduira de l'intégrale (6) les valeurs des intégrales d'autres fonctions irrationnelles, qui seront, en général, d'une espèce supérieure.

Par exemple, pour l'intégrale

$$(8) \qquad \int \frac{a\,dx}{(a + bx^n)^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{x}{(a + bx^n)^{\frac{1}{n}}} + \text{const.},$$

l'équation (7) est

$$(9) \qquad 1 + x^n \frac{db}{da} = 0;$$

par conséquent, les paramètres de cette intégrale (8) peuvent être remplacés par des fonctions de x, liées entre elles par la relation (9). En faisant $b = \sin a$, on déduit de (9) :

$$a = \text{arc séc } x^n,$$

et, par suite, la valeur de l'intégrale

$$\int \frac{\text{arc séc } x^n dx}{(\text{arc séc } x^n + \sqrt{x^{2n} - 1})^{\frac{n+1}{n}}}$$
$$= \frac{x}{(\text{arc séc } x^n + \sqrt{x^{2n} - 1})^{\frac{1}{n}}} + \text{const.}$$

9. La méthode de la variation des paramètres, exposée au n° 6, étant appliquée aux intégrales des fonctions exponentielles $e^{\varphi(x,a,b,\ldots)}\psi(x, a, b, \ldots)\,dx$, où φ et ψ désignent des fonctions algébriques de x et des paramètres $a, b, \ldots$, quand ces intégrales s'expriment sous forme finie, fournit une relation *algébrique* entre la variable x, les paramètres $a, b, \ldots$, et leurs dérivées $\frac{db}{da}, \ldots$, par rapport à l'un d'eux.

Cela résulte de ce théorème, dû à M. Liouville (*Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes; Journal de Crelle*, t. XIII, p. 93) : *Si l'intégrale* $\int e^x y\,dx$, *où* y *désigne une fonction algébrique de* x, *est possible sous forme finie, on aura*

$$\int e^x y\,dx = e^x \mathrm{F}(x, y) + \text{const.},$$

$\mathrm{F}(x,y)$ *étant une fonction rationnelle de* x *et* y.

D'après cela, en supposant que l'intégrale

$$\int e^{\varphi(x,a,b,\ldots)}\psi(x, a, b, \ldots)\,dx$$

soit connue sous forme finie, nous aurons

$$\int e^{\varphi(x,a,b,\ldots)}\varphi(x, a, b, \ldots)\,dx$$
$$= e^{\varphi(x,a,b,\ldots)} f(x, a, b, \ldots) + \text{const.},$$

où $f(x, a, b, \ldots)$ sera une fonction algébrique de $x, a, b, \ldots$, et l'équation (2), relative à cette intégrale, étant débarrassée du facteur $e^{\varphi(x,a,b,\ldots)}$, prendra cette forme

$$\frac{\partial f}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial b}\frac{db}{da} + \ldots + f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{db}{da} + \ldots\right) = 0,$$

qui sera algébrique par rapport à $a, b, \ldots, \frac{db}{da}, \ldots$.

10. Par exemple, pour les paramètres a, b de l'inté-

grale

(10) $$\int e^{\alpha ax+b}dx = \frac{e^{\alpha ax+b}}{\alpha a} + \text{const.},$$

où α est un nombre indépendant de a, b, on trouve ainsi la relation

$$a\frac{db}{da} + \alpha x a - 1 = 0.$$

En faisant

$$\alpha = \frac{\lambda}{\mu}, \quad b = \frac{a^n}{n\mu},$$

λ, μ, n étant des nombres quelconques, on en déduit la formule

$$\int e^{\frac{n-1}{n}\frac{\lambda}{\mu}ax}\,dx = \frac{\mu}{\lambda}\frac{e^{\frac{n-1}{n}\frac{\lambda}{\mu}ax}}{a} + \text{const.},$$

pour a satisfaisant à l'équation

$$a^n + \lambda x a - \mu = 0;$$

et si l'on pose

$$\lambda = n, \quad \mu = (n-1)\delta,$$

il vient

$$\int e^{\frac{ax}{\delta}}\,dx = \left(\frac{n-1}{n}\right)\delta\frac{e^{\frac{ax}{\delta}}}{a} + \text{const.},$$

pour a satisfaisant à l'équation

$$a^n + nxa - (n-1)\delta = 0.$$

Dans les cas de $n = 2, 3$, on obtient ainsi

$$\int e^{\frac{x}{\delta}(\sqrt{x^2+\delta}-x)}\,dx = \frac{\delta}{2}\frac{e^{\frac{x}{\delta}(\sqrt{x^2+\delta}-x)}}{\sqrt{x^2+\delta}-x} + \text{const.},$$

$$\int e^{\frac{ax}{\delta}}\,dx = \frac{2}{3}\delta\frac{e^{\frac{ax}{\delta}}}{a},$$

où

$$a = \sqrt[3]{\delta + \sqrt{x^3+\delta^2}} + \sqrt[3]{\delta - \sqrt{x^3+\delta^2}}.$$

11. Remarquons maintenant que, l'intégrale d'une fonction quelconque, renfermant des paramètres, étant connue sous forme finie, il sera souvent facile d'en déduire, à l'aide de la variation des paramètres, les intégrales de certaines fonctions exponentielles. En effet, soit

$$\int f(x, a, b, \ldots)\,dx = \mathrm{F}(x, a, b, \ldots) + \text{const.}$$

En multipliant les deux membres de cette équation par la constante e^a, nous aurons

$$(11) \quad \int e^a f(x, a, b, \ldots)\,dx = e^a \mathrm{F}(x, a, b, \ldots) + \text{const.},$$

et l'équation (2), relative à cette dernière intégrale, étant divisée par le facteur e^a, prendra la forme

$$(12) \qquad \mathrm{F} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial a} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial b}\frac{db}{da} + \ldots = 0.$$

En remplaçant les paramètres $b, \ldots$ par des fonctions de a, choisies arbitrairement, et éliminant ensuite a entre les équations (11) et (12), on obtiendra la valeur de l'intégrale d'une fonction exponentielle.

Ainsi, de l'intégrale

$$\int \frac{dx}{(a + bx^n)^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{x}{a(a + bx^n)^{\frac{1}{n}}} + \text{const.},$$

on déduit

$$(13) \quad \int \frac{e^a\,dx}{(a + bx^n)^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{e^a x}{a(a + bx^n)^{\frac{1}{n}}} + \text{const.},$$

et la relation (12) entre a et b devient

$$(a - 1)(a + bx^n) - \frac{a}{n}\left(1 + x^n \frac{db}{da}\right) = 0.$$

Si l'on suppose b indépendant de a, cette équation se

réduit à

$$(14) \qquad a^2 + \left(bx^n - \frac{n+1}{n}\right)a - bx^n = 0,$$

et l'élimination de a entre (13) et (14) conduit à ce résultat

$$\int \frac{e^{-\frac{bx^n}{2}+\frac{1}{2n}\sqrt{R}}\,dx}{(n+1+nbx^n+\sqrt{R})^{\frac{n+1}{n}}}$$

$$= \frac{xe^{-\frac{bx^n}{2}+\frac{1}{2n}\sqrt{R}}}{(n+1-nbx^n+\sqrt{R})(n+1+nbx^n+\sqrt{R})^{\frac{1}{n}}} + \text{const.},$$

où

$$R = n^2b^2x^{2n} + 2n(n-1)bx^n + (n+1)^2.$$

12. Le théorème de M. Liouville, cité au n° 9, comprend, comme corollaire, la proposition suivante :

Si l'intégrale $\int f(x)\sin x\,dx$, $f(x)$ désignant une fonction algébrique, est possible sous forme finie, on aura

$$\int f(x)\sin x\,dx = \varphi(x)\cos x + \psi(x)\sin x + \text{const.},$$

φ et ψ étant des fonctions algébriques; elles seront rationnelles, si $f(x)$ est une fonction rationnelle.

Il est facile de s'en convaincre, au moyen des relations connues entre les fonctions exponentielles et trigonométriques. De plus, la fonction $\varphi(x)$ devra vérifier l'équation différentielle

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} + f(x) = 0,$$

dont les solutions rationnelles, si elles existent, pourront être trouvées d'après la méthode de M. Liouville

(*Second Mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique; Journal de l'École Polytechnique,* XXIIe Cahier, p. 117). La fonction $\varphi(x)$ étant connue, on trouvera $\psi(x)$ par l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx} + \psi = 0.$$

Tout ce qui a été dit, relativement à l'intégrale $\int f(x) \sin x \, dx$, s'applique, avec des modifications correspondantes, à l'intégrale $\int f(x) \cos x \, dx$.

13. Concevons maintenant que l'expression

$$f(x, a, b, \ldots) \sin x \, dx,$$

$f(x, a, b, \ldots)$ étant une fonction algébrique de x et des paramètres $a, b, \ldots$, s'intègre sous forme finie; alors, d'après le théorème du numéro précédent, on devra avoir

$$\int f(x, a, b, \ldots,) \sin x \, dx$$
$$= \varphi(x, a, b, \ldots) \cos x + \psi(x, a, b, \ldots) \sin x + \text{const.},$$

où φ et ψ sont des fonctions algébriques, et l'équation (2) prendra, par conséquent, la forme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a} + \frac{\partial\varphi}{\partial b}\frac{db}{da} + \ldots + \left(\frac{\partial\psi}{\partial a} + \frac{\partial\psi}{\partial b}\frac{db}{da} + \ldots\right) \operatorname{tang} x = 0;$$

d'où il suit que a s'exprimera algébriquement en x et $\operatorname{tang} x$, après que les paramètres $b, \ldots$ seront remplacés par des fonctions algébriques de a.

Par exemple, en écrivant l'équation (2) pour l'intégrale

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \frac{x^3 + 2a(x^2 - 1) + a^2 x}{(x+a)^3} \sin x \, dx \\ &\quad = -\frac{x \cos x}{x+a} + \frac{a \sin x}{(x+a)^2} + \text{const.}, \end{aligned} \right.$$

on a

$$x(x+a)+(x-a)\operatorname{tang} x=0;$$

c'est-à-dire que la formule (15) subsiste, quand on y remplace le paramètre a par la fonction

$$a=\frac{x(x+\operatorname{tang} x)}{\operatorname{tang} x-x},$$

et l'on obtient ainsi

$$\int(x-\operatorname{tang} x)\left(2+\cot^2 x-\frac{1}{x^2}\right)\cos x\,dx$$
$$=(x-\operatorname{tang} x)\left[\frac{2\cos x}{\operatorname{tang} x}-\frac{(x+\operatorname{tang} x)\sin x}{x\operatorname{tang}^2 x}\right]+\text{const.}$$

14. Pour terminer, nous donnerons encore les exemples suivants de l'intégration au moyen de la variation des paramètres :

1° L'équation (2) relative à l'intégrale

$$\int\frac{a\,dx}{[a+(ax+b)\operatorname{tang} x]^2}=\frac{\operatorname{tang} x}{a+(ax+b)\operatorname{tang} x}+\text{const.}$$

est

$$1+\left(x+\frac{db}{da}\right)\operatorname{tang} x=0,$$

d'où, en posant $b=e^a$, on tire

$$a=\log(x+\cot x),\quad b=x+\cot x,$$

et, par suite,

$$\int\frac{\log(x+\cot x)\,dx}{(x\operatorname{tang} x+1)^2[\log(x+\cot x)+1]^2}$$
$$=\frac{\operatorname{tang} x}{(x\operatorname{tang} x+1)[\log(x+\cot x)+1]}+\text{const.}$$

2° En formant l'équation (2), pour l'intégrale

$$(16)\quad\int\frac{(3x+a)\,dx}{\sqrt{R}}=\log\left(\frac{x^2+ax+\sqrt{R}}{x^2+ax-\sqrt{R}}\right)+\text{const.},$$

où

$$R = (x^2 + ax)^2 + bx,$$

on trouve

$$\frac{x+a}{2}\frac{db}{da} - b = 0,$$

et, si l'on y fait

$$b = \frac{\beta}{\alpha^2} e^{-\alpha a - 2},$$

α et β désignant des nombres indépendants de a et b, cette relation fournit les valeurs suivantes de a, b,

$$a = -x - \frac{2}{\alpha}, \quad b = \frac{\beta}{\alpha^2} e^{\alpha x},$$

après quoi la formule (16) devient

$$\int \frac{(\alpha x - 1)\,dx}{\sqrt{4x^2 + \beta x e^{\alpha x}}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{2x - \alpha\sqrt{4x^2 + \beta x e^{\alpha x}}}{2x + \alpha\sqrt{4x^2 + \beta x e^{\alpha x}}}\right) + \text{const.}$$

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1876.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Étant donné un parallélépipède, on considère trois arêtes qui n'ont pas d'extrémités communes et les deux sommets non situés sur ces trois arêtes :

1° Trouver l'équation du lieu d'une courbe plane du second degré, passant par ces deux points et s'appuyant sur les trois arêtes; 2° chercher les droites réelles situées sur la surface; 3° étudier la forme des sections faites dans la surface par des plans parallèles à l'une des faces du parallélépipède.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

On donne une circonférence, une droite fixe LL′ qui rencontre la circonférence, et deux points fixes A et A′ sur la circonférence; on joint un point quelconque M de la courbe aux deux points A et A′, les droites MA, MA′ rencontrent la ligne fixe LL′ en deux points variables P et P′ : démontrer qu'il existe sur la droite LL′ deux points fixes I et I′, tels que le produit $IP \times I'P'$ demeure constant lorsque le point M se meut sur la circonférence; déterminer la position des deux points I et I′.

PHILOSOPHIE.

Dans un cube dont l'arête est a, on mène une diagonale AA′, puis on coupe le solide par un plan mené perpendiculairement à la diagonale et à une distance d du sommet A :

1° On demande la figure de la section qui correspond aux diverses valeurs de d;

2° On demande l'aire de la section et les limites entre lesquelles elle varie lorsque le plan sécant se déplace.

RHÉTORIQUE.

Première question. — Système de Copernic.

Seconde question. — Étant donnée une sphère, on construit, sur un grand cercle de cette sphère, comme base, un cône équivalent à la moitié du volume de la sphère, et l'on demande :

1° De trouver le rayon du petit cercle suivant lequel la surface de ce cône coupe la surface de la sphère;

2° D'évaluer le volume de la portion de cône comprise entre sa base et le plan de ce petit cercle.

SECONDE.

Première question. — Construire un triangle ABC, connaissant les longueurs des deux côtés AB et AC, et celle de la bissectrice AD de l'angle A.

Seconde question. — On mène les diagonales d'un trapèze ABCD, lesquelles se coupent en un point O. Étant données les aires p^2 et q^2 des deux triangles AOB, COD, trouver l'expression de l'aire des deux autres triangles AOC, BOD, et celle de l'aire du trapèze.

TROISIÈME.

Première question. — Construire un triangle ABC, connaissant la base AB, donnée de position, l'angle au sommet C, et un point P pris sur la bissectrice de l'angle formé au point C par le côté AC et le prolongement du côté BC.

Seconde question. — Une somme de 7200 francs a été placée à intérêts simples; et l'on remarque : 1° que si la durée du placement eût été augmentée de dix jours, l'intérêt total eût augmenté de 12 francs; 2° que si le taux eût diminué de $\frac{1}{2}$ pour 100, l'intérêt eût diminué de 24 francs.

On demande le taux et la durée du placement (l'année est comptée pour 360 jours).

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL.

Première question. — Étant donnés deux rectangles égaux superposés ABCD, A'B'C'D' :

1° Déterminer géométriquement un point O tel, que si, laissant fixe le rectangle ABCD, on fait tourner autour de ce point le rectangle A'B'C'D' jusqu'à ce que le

grand côté A'B', qui coïncidait primitivement avec AB, vienne se placer perpendiculairement à AB, le milieu de A'B' se trouve au point de concours des diagonales du rectangle ABCD;

2° Calculer, en supposant les longueurs des côtés AB et AD égales à $2a$ et à $2b$, les distances du point O aux deux côtés AB et AD.

Seconde question. — On donne un prisme droit et une pyramide de même hauteur égale à 5 centimètres; la base du prisme est un triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle de 3 centimètres de rayon; la base de la pyramide est un triangle équilatéral DEF inscrit dans le même cercle, le point D étant diamétralement opposé au point A; le sommet de la pyramide est sur l'arête latérale du prisme qui passe par le point A.

On prend pour plan horizontal le plan du cercle, pour ligne de terre une perpendiculaire au diamètre AD, située à 5 centimètres du centre, et du même côté que le point D par rapport à ce centre.

Représenter les deux solides par leurs projections; construire les projections de la surface d'intersection des surfaces des deux solides; puis, transportant la figure parallèlement à la ligne de terre de 3 centimètres vers la droite, représenter par ses projections le solide commun au prisme et à la pyramide.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

Les personnes qui veulent étudier la théorie des fonctions elliptiques ont certainement d'excellents ouvrages à leur disposition : les *Fundamenta nova* de Jacobi, les

OEuvres d'Abel, l'ouvrage plus ancien de Legendre, sont des chefs-d'œuvre qu'il est bon d'avoir lus quand on veut approfondir la théorie des fonctions elliptiques. Le *Traité des fonctions doublement périodiques*, de MM. Briot et Bouquet, résume aujourd'hui presque tous les faits acquis à la Science sur cette branche intéressante de l'Analyse; mais il n'existe pas de Traité, pour ainsi dire élémentaire, dans lequel on puisse prendre une idée suffisamment exacte de la théorie des fonctions elliptiques, sans cependant l'approfondir dans tous ses détails.

Nous croyons donc faire une chose utile en offrant aux lecteurs des *Nouvelles Annales* une théorie des fonctions elliptiques résumant leurs propriétés les plus importantes, et leurs principales applications à la Géométrie et à la Mécanique.

Nous n'avons pas l'intention, disons-le immédiatement, de suppléer à la lecture des grands maîtres; nos articles devront surtout avoir pour but de faciliter cette lecture et d'en inspirer le goût.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Avant d'aborder la question des fonctions elliptiques, nous ferons connaître quelques principes relatifs à la théorie générale des fonctions.

Nous représenterons une imaginaire $x+y\sqrt{-1}$ par un point dont les coordonnées seront x et y, ou par une droite dont la longueur sera le module $r=\sqrt{x^2+y^2}$, faisant avec l'axe des x un angle θ égal à l'argument de $x+y\sqrt{-1}$. Cet argument sera d'ailleurs pour nous *l'un quelconque* des angles ayant pour cosinus $\frac{x}{r}$ et pour sinus $\frac{y}{r}$.

Quand nous dirons que le point $x+y\sqrt{-1}$ décrit une courbe, il faudra entendre par là que le point dont les coordonnées sont x, y décrit cette courbe. On peut considérer l'expression $\mathrm{X}+\mathrm{Y}\sqrt{-1}$, où X et Y sont des fonctions de x et y, comme une fonction de $x+y\sqrt{-1}$. Cauchy se plaçait à ce point de vue, mais nous ne considérerons que les fonctions de $x+y\sqrt{-1}$ ayant une dérivée unique et bien déterminée. Cette condition d'avoir une dérivée unique impose à X et Y certaines propriétés que nous allons faire connaître. La dérivée de $\mathrm{X}+\mathrm{Y}\sqrt{-1}$ est

$$\frac{d\mathrm{X}+d\mathrm{Y}\sqrt{-1}}{dx+dy\sqrt{-1}}=\frac{\dfrac{d\mathrm{X}}{dx}dx+\dfrac{d\mathrm{X}}{dy}dy+\sqrt{-1}\left(\dfrac{d\mathrm{Y}}{dx}dx+\dfrac{d\mathrm{Y}}{dy}dy\right)}{dx+dy\sqrt{-1}};$$

et, pour qu'elle soit indépendante du rapport $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire de la manière dont $dx+dy\sqrt{-1}$ tend vers zéro, il faut que

$$\frac{\dfrac{d\mathrm{X}}{dx}+\sqrt{-1}\dfrac{d\mathrm{Y}}{dx}}{1}=\frac{\dfrac{d\mathrm{X}}{dy}+\sqrt{-1}\dfrac{d\mathrm{Y}}{dy}}{\sqrt{-1}};$$

d'où l'on conclut, en égalant les parties réelles et les coefficients de $\sqrt{-1}$,

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx}=\frac{d\mathrm{Y}}{dy},\quad \frac{d\mathrm{Y}}{dx}=-\frac{d\mathrm{X}}{dy}\quad (*).$$

Nous supposerons ces relations toujours satisfaites; d'ailleurs, la manière dont on prend les dérivées des fonctions que l'on rencontre en analyse prouve que ces fonctions n'ont qu'une seule dérivée.

(*) Pour l'interprétation de ces formules, *voir* le *Traité des fonctions doublement périodiques*, de MM. Briot et Bouquet.

Une fonction qui n'a qu'une dérivée en chaque point, c'est-à-dire pour chaque valeur de la variable, a quelquefois été appelée *monogène*.

Une fonction est dite *monodrome* dans une portion C du plan, quand, le point qui représente sa variable (ou, pour abréger, quand sa variable) se mouvant dans cette portion C du plan, la fonction reprend toujours la même valeur quand sa variable repasse par le même point.

Les fonctions bien définies, telles que les fonctions rationnelles, le sinus, le cosinus, l'exponentielle, etc., sont monodromes dans toute l'étendue du plan; car, leur variable étant donnée, elles sont entièrement définies. Il n'en est pas de même des fonctions irrationnelles; ainsi, pour ne prendre qu'un seul exemple, $\sqrt{z-a}$ ou $\sqrt{x+y\sqrt{-1}-a}$ n'est pas monodrome à l'intérieur d'un contour contenant le point a.

Imaginons, en effet, que le point z, ou $x+y\sqrt{-1}$, décrive un cercle de rayon r ayant pour centre le point a; on sait que la droite qui représente la somme de deux imaginaires est la résultante des droites représentant chaque partie de la somme (*); la droite $re^{\theta\sqrt{-1}}$, qui représentera la somme $z-a$, sera donc la résultante des droites qui représentent z et $-a$. Cette droite est celle qui va du point $+a$ au point z. Supposer que le point z décrit un cercle de rayon r autour du point a, c'est donc supposer que le module r de $z-a=re^{\theta\sqrt{-1}}$ reste constant. Cela posé, on a

$$\sqrt{z-a}=r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}.$$

(*) *Voir* l'Ouvrage de Mourey sur *La vraie théorie des quantités prétendues imaginaires*; sur le *Calcul des équipollences* (*Nouvelles Annales*, 2e série, t. VIII, 1869); mon *Traité d'Algèbre*; l'Ouvrage de MM. Briot et Bouquet déjà cité, etc.

Que le point z se meuve sur le cercle en tournant dans le sens positif (celui dans lequel les angles croissent en Trigonométrie), θ va croître ainsi que $\frac{\theta}{2}$. Mais, quand θ aura varié de 2π, le point z sera revenu à son point de départ, et z aura repris sa valeur initiale; il n'en sera pas de même de $\sqrt{z-a}$, qui sera devenu

$$r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta+2\pi}{2}\sqrt{-1}} = -r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}},$$

et qui aura changé de signe.

DES INTÉGRALES PRISES ENTRE DES LIMITES IMAGINAIRES.

La fonction $f(z)$ de la variable imaginaire

$$z = x + y\sqrt{-1}$$

est en réalité une fonction de deux variables, et si, entre x et y, on établit une relation, telle que

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

$f(z)$ devient alors fonction de la seule variable t. Si l'on pose alors

$$x_0 = \varphi(t_0), \quad y_0 = \psi(t_0), \quad X = \varphi(T), \quad Y = \psi(T),$$

et

$$z_0 = x_0 + y_0\sqrt{-1}, \quad Z = X + Y\sqrt{-1},$$

l'intégrale

$$\int_{t_0}^{T} f(z)\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\sqrt{-1}\right)dt$$

aura une valeur bien déterminée. On représente souvent cette intégrale par le symbole

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz,$$

qui, comme l'on voit, est indéterminé si l'on ne dit pas de quelle façon x et y sont liés entre eux ou à t. Cette expression est ce que l'on appelle une *intégrale prise entre des limites imaginaires;* pour en préciser le sens, on ajoute la relation qui lie x à y, soit directement, soit par l'intermédiaire de la variable auxiliaire t.

Le plus souvent on emploie, pour fixer le sens de la notation $\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$, un langage géométrique, et, au lieu de se donner les relations $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, on indique la nature de la courbe représentée par ces équations. Si, par exemple, on posait

$$x=\cos t,\quad y=\sin t,$$

on aurait $x^2+y^2=1$, et si l'on intégrait par rapport à t de zéro à π, on dirait que l'on prend l'intégrale le long d'un demi-cercle de rayon un, décrit de l'origine comme centre et limité à l'axe des x.

Réciproquement, quand on se donne le *contour d'intégration,* on ramène facilement l'intégrale à une ou plusieurs autres prises entre des limites réelles. Supposons, par exemple, que l'on demande d'intégrer $f(z)\,dz$ le long d'une droite inclinée à 45 degrés sur l'axe des x, issue de l'origine et aboutissant à un point situé à la distance l de l'origine.

Les équations de cette ligne seront

$$x=t\frac{\sqrt{2}}{2},\quad y=t\frac{\sqrt{2}}{2};$$

on aura

$$dx=dt\frac{\sqrt{2}}{2},\quad dy=dt\frac{\sqrt{2}}{2},$$

et, par suite,

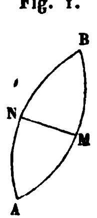
$$\int f(z)\,dz=\int_0^l f\left[t\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{-1})\right](1+\sqrt{-1})\frac{\sqrt{2}}{2}\,dt.$$

Je prends pour limites o et l, parce que t représente la distance du point (x, y) à l'origine; cette distance est o ou l, selon que le point (x, y) est à l'origine ou à l'extrémité de la droite.

THÉORÈME DE CAUCHY. — *Le point z variant à l'intérieur d'un contour donné, si, à l'intérieur de ce contour, la fonction $f(z)$ reste monodrome, monogène et finie, l'intégrale $\int_{z_0}^{Z} f(z)\,dz$ conservera toujours la même valeur, pourvu que le chemin qui mène de z_0 à Z ne sorte pas du contour donné, quel que soit d'ailleurs ce chemin.*

Pour démontrer ce théorème, un des plus féconds de toute l'Analyse, nous intégrerons la fonction $f(z)$ le long de deux contours AMB, ANB. Soient s l'arc du premier

Fig. 1.



contour compté à partir du point A, et ks l'arc du second compté toujours à partir du même point A; soient

$$x_1 = \varphi_1(s), \quad y_1 = \psi_1(s)$$

les équations du premier contour, et

$$x_2 = \varphi_2(ks), \quad y_2 = \psi_2(ks)$$

celles du second; et, en désignant par S l'arc AMB, supposons que kS soit l'arc ANB. Joignons maintenant les points correspondants des deux contours; soient M

et N deux points correspondants, c'est-à-dire tels que $AN = kAM$. Nous supposerons que la droite MN soit tout entière dans l'intervalle compris entre les deux contours; considérons maintenant le contour ayant pour équations

$$x = \varphi_1(s)\frac{\alpha - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} + \varphi_2(ks)\frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_2},$$

$$y = \psi_1(s)\frac{\alpha - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} + \psi_2(ks)\frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Pour $\alpha = \alpha_1$, il se réduira au premier contour AMB, et, pour $\alpha = \alpha_2$, il se réduira au second ANB; et, de plus, tous ses points seront compris à l'intérieur de l'aire AMBNA, quand on supposera α compris entre α_1 et α_2. Intégrons la fonction $f(z)$ le long de ce contour, nous aurons

$$\int f(z)\,dz = \int_0^S f(x + y\sqrt{-1})\left(\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\sqrt{-1}\right)ds$$
$$= \int_0^S f(z)\frac{dz}{ds}\,ds;$$

$\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}$ restent d'ailleurs finis, ainsi que leurs dérivées prises par rapport à α. Appelons u cette intégrale, nous aurons

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_0^S \frac{d}{d\alpha}\left[f(z)\frac{dz}{ds}\right]ds,$$

ou

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_0^S \left[f'(z)\frac{dz}{d\alpha}\frac{dz}{ds} + f(z)\frac{d^2z}{d\alpha\,ds}\right]ds,$$

ou, en intégrant le second terme par parties,

$$\frac{du}{d\alpha} = \left[f(z)\frac{dz}{d\alpha}\right]_0^S + \int_0^S \left[f'(z)\frac{dz}{d\alpha}\frac{dz}{ds} - f'(z)\frac{dz}{d\alpha}\frac{dz}{ds}\right]ds,$$

ou

$$\frac{du}{d\alpha} = \left[f(z) \frac{dz}{d\alpha} \right]_0^S.$$

Or $\frac{dz}{d\alpha}$ est nul pour $s = 0$ et $s = S$, le contour passant en A et B pour $s = 0$ et $s = S$ quel que soit α, c'est-à-dire ne dépendant pas alors de α; donc $\frac{du}{d\alpha} = 0$, et, par suite, u ne dépend pas de α; il a donc la même valeur pour $\alpha = \alpha_1$ et pour $\alpha = \alpha_2$, c'est-à-dire que l'intégrale prise le long de AMB ou de ANB conserve la même valeur. Cela suppose toutefois que $f(z)$ conserve la même valeur, quel que soit le contour par lequel le point z se rend de A en B; $f(z)$ doit donc être monodrome; elle doit aussi être monogène, car nous avons supposé

$$\frac{df}{d\alpha} = f'(z) \frac{dz}{d\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{df}{ds} = f'(z) \frac{dz}{ds},$$

c'est-à-dire que nous avons admis que $f'(z)$ restait indépendant de la direction de l'accroissement donné à z, pour en faire le calcul; enfin nos raisonnements supposent $f(z)$ et $f'(z)$ finis.

Considérons maintenant deux contours quelconques

Fig. 2.

aboutissant en A et B, et désignons, pour abréger, par (PRQ ...) l'intégrale de $f(z)$ prise le long d'un contour désigné par PRQ ... Le théorème est démontré pour

deux contours formant à eux deux un contour fermé convexe, car une sécante joignant deux points correspondants ne rencontre le contour fermé qu'en deux points et reste intérieure à ce contour : il en résulte que l'intégrale prise le long d'un contour fermé convexe quelconque est nulle, car l'intégrale en question est égale à l'intégrale prise le long d'un contour infiniment petit. C'est cette proposition que nous allons d'abord généraliser : considérons le contour AMBN, décomposons-le en une infinité d'autres par des parallèles à une direction donnée, on obtiendra ainsi une série de contours convexes. En vertu de la notation adoptée, on aura alors

$$\begin{gathered}
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
(ab) + (bb') + (b'a') + (a'a) = 0, \\
(a'b') + (b'b'') + (b''a'') + (a''a') = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;
\end{gathered}$$

si l'on ajoute toutes ces formules, les termes tels que $(a'b')$ et $(b'a')$ se détruisent, et il reste $\Sigma(a'a) + \Sigma(bb') = 0$, c'est-à-dire que l'intégrale prise le long du contour fermé total est nulle. On a donc

$$(\mathrm{AMB}) + (\mathrm{BNA}) = 0,$$

ou

$$(\mathrm{AMB}) - (\mathrm{ANB}) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\mathrm{AMB}) = (\mathrm{ANB}).$$

C. Q. F. D.

CAS OU LE THÉORÈME DE CAUCHY TOMBE EN DÉFAUT.

Cauchy a remarqué que son théorème tombait en défaut dès que la fonction $f(z)$ cessait d'être finie, continue, monodrome ou monogène, et il a tiré parti de ces cas pour enrichir la Science d'une de ses plus belles découvertes.

Théorème I. — *L'intégrale d'une fonction monodrome, monogène, finie et continue* (*ou* synectique, *comme l'appelle Cauchy*) *à l'intérieur d'un contour fermé, est nulle quand on la prend le long de ce contour.*

En effet, elle est égale, comme nous l'avons déjà observé, à l'intégrale prise le long d'un contour quelconque, ayant la même origine et la même extrémité, intérieur à ce contour; le deuxième contour pouvant être pris aussi petit que l'on veut, puisque l'origine et l'extrémité se touchent, l'intégrale est nulle.

Cauchy appelle *résidu* de la fonction monodrome, monogène et continue $f(z)$, pour la valeur c qui rend $f(z)$ infinie, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int f(z)\,dz,$$

prise le long d'un contour circulaire de rayon infiniment petit, décrit du point c comme centre.

Théorème II. — *Soient* $R_1, R_2, \ldots, R_n$ *les résidus de la fonction* $f(z)$ *relatifs aux infinis* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *de cette fonction, contenus à l'intérieur d'un contour fermé où elle reste monodrome et monogène, l'intégrale* $\int f(z)\,dz$ *prise le long de ce contour sera égale à*

$$(R_1 + R_2 + \ldots + R_n)\,2\pi\sqrt{-1}.$$

Supposons qu'il n'y ait que deux infinis dans le contour, et qu'ils soient les centres des cercles *bcd*, *ghi*; appelons en général (M) l'intégrale de $f(z)$ le long du contour désigné par M.

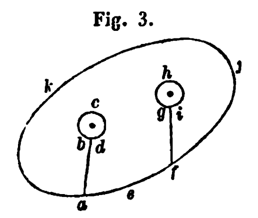
Le contour *abcdaefghifjka* constitue un contour fermé ne contenant pas les infinis de $f(z)$; donc (*abcdaefghifjka*)

est nul. Or

$$(abcdaefghifjka) = (ab) + (bcd) + (da) + (aef) + (fg) + (ghi) + (if) + (fjka);$$

le premier membre est nul; $(ab) = -(da)$, car ce sont les mêmes intégrales dont les limites sont inversées; de

Fig. 3.



même $(fg) = -(if)$ et $(fjka) + (aef)$ est l'intégrale proposée; on a donc

$$0 = (bcd) + (aef) + \int f(z)\,dz.$$

Or (bcd) est l'intégrale prise le long d'un contour circulaire très-petit décrit autour d'un infini, z marchant dans le sens rétrograde; cette intégrale est, au facteur près $-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}$, le résidu de $f(z)$; donc

$$0 = -2\pi\sqrt{-1}\,R_1 - 2\pi\sqrt{-1}\,R_2 + \int f(z)\,dz,$$

ou

$$\int f(z)\,dz = 2\pi\sqrt{-1}\,(R_1 + R_2).$$

C. Q. F. D.

CALCUL DES RÉSIDUS.

Avant de montrer comment on calcule le résidu d'une fonction, nous allons revenir un instant sur la règle de la différentiation sous le signe $\int$. Cette règle est encore applicable quand on s'adresse à une intégrale prise entre des limites imaginaires, puisqu'une telle in-

tégrale revient à une autre prise entre des limites réelles. Enfin cette règle est encore applicable quand la variable par rapport à laquelle on différentie est imaginaire. En effet, différentier une quantité u par rapport à $x+y\sqrt{-1}$, c'est calculer le rapport

$$\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}dx+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}dy}{dx+dy\sqrt{-1}}.$$

Ce rapport est indéterminé (excepté si u est une fonction monogène), et, pour en préciser le sens, on doit donner le rapport $\frac{dy}{dx}$, ou, si l'on veut, on doit supposer x et y fonctions données $\varphi(t)$, $\psi(t)$ d'une même variable t, et se donner $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$. On différentie alors le long de l'élément (dx, dy) appartenant à une courbe dont les équations sont $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$; on a alors l'expression suivante de la dérivée de u

$$\frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\varphi'(t)+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\psi'(t)}{\varphi'+\psi'\sqrt{-1}}.$$

Si l'on veut alors différentier l'intégrale

$$\mathrm{V}=\int f(\mu, x+y\sqrt{-1})\,d\mu$$

par rapport à $x+y\sqrt{-1}$, on formera $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$ par la règle ordinaire, et l'on aura

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}(x+y\sqrt{-1})}=\int\frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\varphi'(t)+\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\psi'(t)}{\varphi'+\psi'\sqrt{-1}}d\mu,$$

ou

$$\frac{\mathrm{dV}}{\mathrm{d}(x+y\sqrt{-1})}=\int\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}(x+y\sqrt{-1})}d\mu,$$

et l'on voit que l'on différentie par rapport à un paramètre imaginaire comme par rapport à un paramètre réel.

Lorsque la quantité qui se trouve placée sous le signe $\int$ est monogène par rapport au paramètre, on peut raisonner encore plus simplement en faisant observer que $\frac{du}{d(x+y\sqrt{-1})}$ est égal à $\frac{du}{dx}$, et que, différentier par rapport à $x+y\sqrt{-1}$, c'est en définitive différentier par rapport à la variable réelle x.

Cela posé, calculons d'abord le résidu de la fonction $\frac{\varphi(z)}{z-c}$, $\varphi(z)$ étant supposée finie et différente de zéro pour $z=c$; ce résidu est

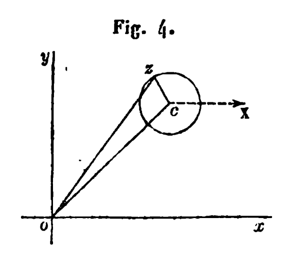
(1) $$R = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{dz.\varphi(z)}{z-c},$$

et l'intégrale est prise le long d'un contour circulaire infiniment petit décrit autour du point c comme centre. Soit ε le rayon de ce contour, on pourra poser

(2) $$z = c + \varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}},$$

et faire varier θ de o à 2π. En effet, la longueur de cz

Fig. 4.



étant désignée par ε, et ε restant constant, le point z décrit le cercle de rayon ε et de centre c. L'angle θ est l'angle zcX que zc fait avec l'axe Ox, et, quand le point z

décrit le cercle, θ varie évidemment de o à 2π. De (2), on tire

$$dz = \varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}}\,d\theta . \sqrt{-1}\,;$$

(1) devient alors

$$R = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi\left(\varepsilon e^{\theta\sqrt{-1}} + c\right) d\theta.$$

Or R est indépendant de la longueur du rayon ε, qu'il faut du reste supposer infiniment petit; donc, en faisant $\varepsilon = 0$, on a

$$R = \frac{1}{2\pi}\varphi(c)\int_0^{2\pi} d\theta = \varphi(c).$$

On voit donc que, si $f(z)$ est une fonction telle que

$$(z - c) f(z),$$

pour $z = c$, soit une quantité finie différente de zéro, cette quantité sera précisément le résidu de $f(z)$ relatif à son infini c.

Reprenons la formule (1), et remplaçons R par $\varphi(c)$, nous aurons

$$\varphi(c) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{z - c},$$

et, en différentiant $m - 1$ fois par rapport à c,

$$\varphi^{m-1}(c) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z - c)^m}\,1.2.3\ldots(m-1);$$

on a donc

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int \frac{\varphi(z)\,dz}{(z-c)^m} = \frac{\varphi^{m-1}(c)}{1.2.3\ldots(m-1)},$$

et l'on a ainsi le résidu d'une fonction de la forme $\frac{\varphi(z)}{(z-c)^m}$, où $\varphi(z)$ est finie et différente de zéro pour $z = c$, et m entier et positif. Dans la suite, nous ne rencontrerons que des résidus de fonctions de cette forme.

APPLICATION DES PRINCIPES PRÉCÉDENTS A LA RECHERCHE DES INTÉGRALES DÉFINIES.

Proposons-nous d'abord de trouver la valeur de l'intégrale définie suivante, dans laquelle a est un nombre positif,

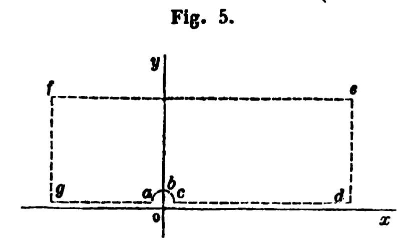
$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx.$$

A cet effet, nous prendrons l'intégrale

$$\int \frac{e^{az\sqrt{-1}}}{z}\,dz$$

le long du contour suivant formé : 1° d'une droite ga allant de $-\infty$ au point a voisin de zéro ; 2° d'un demi-cercle très-petit abc décrit autour de l'origine avec le

Fig. 5.



rayon r ; 3° d'une droite allant de c vers $+\infty$; 4° d'une perpendiculaire de à l'axe des y, située à l'infini ; 5° d'une parallèle ef à l'axe des x, située à l'infini ; 6° d'une perpendiculaire fg située également à l'infini ; nous aurons, en supposant a positif,

$$(ga) = \int_{-\infty}^{-r} \frac{e^{ax\sqrt{-1}}\,dx}{x},$$

$$(abc) = -\frac{1}{2}2\pi\sqrt{-1}\,.\,\text{résidu de}\ \frac{e^{az\sqrt{-1}}}{z} = -\pi\sqrt{-1},$$

$$(cd) = \int_r^\infty \frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{x}\,dx,$$

$$(de) = \int_0^\infty \frac{e^{a\sqrt{-1}(\infty+y\sqrt{-1})}\,dy}{\infty + y\sqrt{-1}}\sqrt{-1} = 0,$$

$$(ef) = (fg) = 0.$$

Le contour total d'intégration ne contenant pas d'infini de $\frac{e^{az\sqrt{-1}}}{z}$, l'intégrale prise le long de ce contour est nulle ; donc

$$\int_{-\infty}^{-r} \frac{e^{-ax\sqrt{-1}}}{x}\,dx - \pi\sqrt{-1} + \int_r^\infty \frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{x}\,dx = 0.$$

Or la première intégrale devient

$$-\int_r^\infty \frac{e^{-ax\sqrt{-1}}\,dx}{x},$$

quand on y change x en $-x$; et, par suite,

$$\int_r^\infty \frac{e^{ax\sqrt{-1}} - e^{-ax\sqrt{-1}}}{x}\,dx = \pi\sqrt{-1},$$

ou, pour $r = 0$,

$$\int_0^\infty 2\sqrt{-1}\,\frac{\sin ax}{x}\,dx = \pi\sqrt{-1},$$

ou enfin

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx = \pi.$$

La fonction

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx$$

ne contient donc pas a, mais elle en dépend ; en effet,

en changeant le signe de a, elle change de signe; cela s'explique, car, en posant $ax = z$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\, dx = \int_{\mp\infty}^{\pm\infty} \frac{\sin z}{z}\, dz.$$

Si nous intégrons $\int e^{-z^2} dz$ le long de l'axe des x et d'une parallèle à cet axe située à la distance a, et si nous fermons ce contour par deux parallèles à l'axe des y situées à l'infini, nous trouverons zéro; or les intégrales relatives à ces parallèles à l'axe des y sont nulles, ce qui se voit en écrivant notre intégrale ainsi :

$$\int e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx + \int_0^a e^{-\infty^2+y^2-\infty y\sqrt{-1}}\, dy\sqrt{-1}$$
$$+ \int_{\infty}^{-\infty} e^{-x^2+a^2-2ax\sqrt{-1}}\, dx$$
$$+ \int_a^0 e^{-\infty+y^2-\infty y\sqrt{-1}}\, dy\sqrt{-1};$$

on a donc

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2+a^2-2ax\sqrt{-1}}\, dx;$$

on en tire

$$0 = \sqrt{\pi} - e^{a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (\cos 2ax - \sqrt{-1}\sin 2ax)\, dx;$$

d'où, séparant les parties réelles et imaginaires,

$$\sqrt{\pi}\, e^{-a^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2ax\, dx,$$
$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \sin 2ax\, dx.$$

Si l'on veut obtenir la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax\, dx}{1+x^2},$$

on peut observer qu'elle est la partie réelle de celle-ci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{1+x^2}\,dx,$$

laquelle est égale à

$$\int \frac{e^{az\sqrt{-1}}\,dz}{1+z^2}$$

prise le long de l'axe des x. Mais on peut remplacer l'axe des x par un demi-contour circulaire de rayon infini décrit de l'origine comme centre et situé au-dessus de l'axe des x. En effet, à l'intérieur de l'aire limitée par l'axe des x et ce dernier contour, la fonction intégrée reste finie et continue, pourvu que a soit positif, excepté pourtant au point $z = \sqrt{-1}$; donc la différence des deux intégrales ne sera pas nulle, mais bien égale au résidu de $\frac{e^{az\sqrt{-1}}}{1+z^2}$ relatif à $z = \sqrt{-1}$, c'est-à-dire à $\frac{e^{-a}}{2\sqrt{-1}}$ multiplié par $2\pi\sqrt{-1}$, ce qui donne πe^{-a}. Mais l'intégrale prise le long du contour demi-circulaire est nulle; pour l'évaluer, il faut prendre $z = Re^{\theta\sqrt{-1}}$ et faire varier θ de π à 0, ce qui donne

$$\int_{\pi}^{0} \frac{e^{R\cos\theta\sqrt{-1}-R\sin\theta}}{1+R^2(\cos 2\theta+\sqrt{-1}\sin 2\theta)}\,d\theta\, Re^{\theta\sqrt{-1}}\sqrt{-1}.$$

Pour $R = \infty$, cette intégrale est bien nulle, et l'on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2}\,dx = \pi e^{-a}.$$

(*A suivre.*)

SOLUTION ÉLÉMENTAIRE DU PROBLÈME GÉNÉRAL DES BRACHISTOCHRONES;

PAR M. H. RESAL,
Membre de l'Institut.

1. Un professeur est quelquefois obligé, par la force des choses, de traiter géométriquement des questions de Mécanique qui devraient faire partie du domaine du calcul des variations. C'est ce qui explique l'objet de cette Note, dans laquelle j'ai cherché à établir directement les principales propriétés des brachistochrones considérées à un point de vue général (*).

Nous supposerons que le point matériel m, qui doit parcourir la courbe du plus rapide trajet de A en B, est sollicité par une force qui dérive d'un potentiel.

1° *Le point n'est pas assujetti à rester sur une surface.*

2. Par un raisonnement très-simple, on arrive facilement à établir le principe suivant :

Si le mobile m est arrivé avec une certaine vitesse en un point a de la brachistochrone, il mettra moins de temps pour parvenir en un autre point b de cette courbe qu'en suivant l'arc de toute autre courbe limite en a et b; d'où l'on conclut :

Deux éléments consécutifs de la brachistochrone jouissent de la propriété d'être parcourus dans un temps minimum.

(*) *Voir* à ce sujet un excellent Mémoire basé sur le calcul des variations, publié par M. Roger, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. XIII, 1re série.

3. *Le plan osculateur en chaque point de la brachistochrone est normal à la surface de niveau correspondante.*

Soient, en effet, mn, nm' deux éléments consécutifs d'une courbe déterminant un plan normal à la surface de niveau (s) passant par n; n' un point de (s) infiniment voisin de n situé sur la normale en ce dernier point au plan mnm'; V, V' les vitesses que posséderait le point mobile m en parcourant mn ou mn' et nm' ou $n'm'$; on a

$$mn < nm', \quad mn' < n'm',$$

d'où

$$\frac{mn}{V} + \frac{nm'}{V'} < \frac{mn'}{V} + \frac{n'm'}{V'},$$

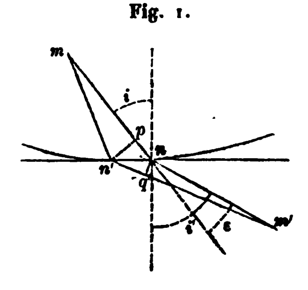
ce qui démontre le théorème énoncé.

Corollaire. — *Si les surfaces de niveau sont des plans parallèles ou des sphères concentriques, la brachistochrone est plane.*

4. *La composante de la force extérieure suivant la normale principale de la brachistochrone est égale à la force centripète.* (Théorème d'Euler.)

Soient (*fig.* 1) mn, nm' deux éléments consécutifs

Fig. 1.



de la courbe; n' un point infiniment voisin de n situé sur la même surface de niveau et dans le plan mnm'; p, q

les projections de n' et n sur mn et $n'm'$; i, i' les angles formés par mn, nm' avec la normale à la surface ci-dessus. Les temps employés pour aller de m en m' en passant par n et n' sont respectivement

$$\frac{mn}{V} + \frac{nm'}{V'} = \frac{mn' + np}{V} + \frac{n'm' - n'q}{V'},$$

$$\frac{mn'}{V} = \frac{n'm'}{V'};$$

La condition relative au minimum du temps employé pour aller de m en m' en passant par n s'exprimera en égalant à zéro la différence de ces deux quantités, d'où

$$\frac{np}{V} = \frac{n'q}{V'};$$

or on a

$$np = nn' \sin i, \quad n'q = nn' \sin i',$$

par suite

$$\frac{\sin i}{V} = \frac{\sin i'}{V'}.$$

Si ε est l'angle de contingence de la courbe, on a

$$i' = i + \varepsilon, \quad V' = V + dV,$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{dV}{dt} = V \cot i \frac{\varepsilon}{dt} = V \cot i \frac{\varepsilon}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{V^2}{\rho} \cot i,$$

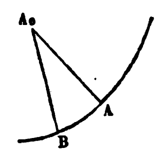
ds étant l'élément de chemin et ρ le rayon de courbure.

Telle est l'expression de la composante tangentielle de la force extérieure F lorsque l'on considère la masse du mobile comme égale à l'unité. Comme cette force est normale à nn', sa composante suivant le rayon de courbure est $\frac{V^2}{\rho}$, ce qu'il fallait établir.

5. *Au point de départ, la brachistochrone est normale à la surface de niveau correspondante.*

Soient (*fig.* 2) A le pied de la normale abaissée du

Fig. 2.



point de départ A_0 sur une surface de niveau qui en est infiniment voisine; B un point de cette surface infiniment voisin de A; φ l'angle AA_0B; on a

$$A_0B = F\cos\varphi\frac{dt^2}{2} = \frac{A_0A}{\cos\varphi},$$

d'où

$$dt = \sqrt{\frac{2A_0A}{F\cos^2\varphi}},$$

expression dont le minimum correspond à $\varphi = 0$, ce qui est conforme à l'énoncé.

6. *Équations de la brachistochrone.* — Soient α, β, γ les angles formés par la tangente avec trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz; α', β', γ', et α'', β'', γ'' les angles semblables relatifs à la normale et à la binormale. Nous avons, en conservant à ε et à ρ les mêmes significations que ci-dessus,

$$\cos\alpha = \frac{dx}{dt},\quad \cos\beta = \frac{dy}{dt},\quad \cos\gamma = \frac{dz}{dt},$$

$$\varepsilon = \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2},$$

$$\cos\alpha' = \frac{d\cos\alpha}{\varepsilon},\quad \cos\beta' = \frac{d\cos\beta}{\varepsilon},\quad \cos\gamma' = \frac{d\cos\gamma}{\varepsilon},$$

$$\cos\alpha'' = \frac{\cos\beta\, d\cos\gamma - \cos\gamma\, d\cos\beta}{\varepsilon},$$

$$\cos\beta'' = \frac{\cos\gamma\, d\cos\alpha - \cos\alpha\, d\cos\gamma}{\varepsilon},$$

$$\cos\gamma'' = \frac{\cos\alpha\, d\cos\beta - \cos\beta\, d\cos\alpha}{\varepsilon} \text{ (*)}.$$

Désignant le potentiel par $f(x, y, z)$, nous aurons d'abord, d'après le n° 3,

$$(2) \qquad \frac{df}{dx}\cos\alpha'' + \frac{df}{dy}\cos\beta'' + \frac{df}{dz}\cos\gamma'' = 0.$$

La composante de la force dirigée vers le centre de courbure est

$$\frac{df}{dx}\cos\alpha' + \frac{df}{dy}\cos\beta' + \frac{df}{dz}\cos\gamma';$$

d'ailleurs, on a

$$V^2 = 2f;$$

d'où, en vertu du n° 4,

$$(3) \qquad 2f\frac{\varepsilon}{ds} = \pm\left(\frac{df}{dx}\cos\alpha' + \frac{df}{dy}\cos\beta' + \frac{df}{dz}\cos\gamma'\right).$$

Les équations (2) et (3) définissent complétement la brachistochrone, en ayant égard à la condition du n° 5.

7. *Cas de la pesanteur.* — Soient Ox et Oy l'horizon-

(*) Menons en effet par l'origine O des parallèles à deux tangentes consécutives et portons sur leur direction, à partir du point O, une longueur $Oa = Oa'$, égale à l'unité; nous avons $aa' = \varepsilon$, et, comme les différences des coordonnées de a et a' sont $d\cos\alpha$, $d\cos\beta$, $d\cos\gamma$, et que aa' est parallèle à la normale principale, on arrive facilement aux valeurs de ε, $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$.

L'aire de la projection du triangle aOa' sur le plan xOy a pour mesure

$$\frac{1}{2}(\cos\alpha\, d\cos\beta - \cos\beta\, d\cos\alpha);$$

mais elle est aussi égale à $\frac{\varepsilon}{2}\cos\gamma''$, d'où la valeur de $\cos\gamma''$, etc.

tale et la verticale du point de départ; α l'angle formé par la tangente avec Ox. On a

$$V^2 = 2gy,$$

$$\rho = -\frac{d\alpha}{ds}.$$

La composante normale de la force étant $g \cos\alpha$, il vient, d'après le n° 4,

$$2y = -\cos\alpha \frac{ds}{d\alpha} \quad \text{ou} \quad \sin\alpha \frac{d\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{dy}{2y};$$

d'où, en désignant par $2R$ une constante et remarquant que $\alpha = 90^\circ$ pour $y = 0$ (5),

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{y}{2R}}.$$

Soient mA la normale en m; A son intersection avec Ox; J l'intersection de la verticale de A avec la tangente; I la projection de m sur AJ. On a

$$y = AI, \quad mA = AJ.\cos\alpha = \sqrt{AJ.y};$$

d'où

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{y}{AJ}};$$

par suite $AJ = 2R$; la courbe est donc une cycloïde décrite par un point de la circonférence de rayon R roulant sur Ox, et dont un point de rebroussement coïncide avec le point de départ.

Nous ne croyons pas devoir reproduire ici la construction d'une brachistochrone passant par un point d'arrivée déterminé.

2° Le point mobile est assujetti à rester sur une surface fixe.

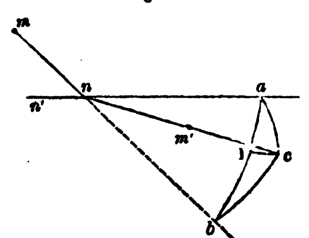
8. Le raisonnement et la figure du n° 4 s'appliquent

encore ici, supposant que *mn* représente l'intersection de la surface fixe avec une surface de niveau. Mais ici l'angle $i' - i$, que nous désignerons par η, n'est plus l'angle de contingence, et, au lieu de la formule (1), nous aurons la suivante, qui s'en déduit en remplaçant ε par η; d'où

$$(4)\qquad \frac{\eta}{ds} V^2 = \frac{dV}{dt} \operatorname{tang} i.$$

Soient a, b, c (*fig.* 3) les intersections des directions de

Fig. 3.



nn', mn, nm' avec la sphère ayant n pour centre et un rayon égal à l'unité. On a

$$ab = 90^\circ - i,\quad ac = 90^\circ - i - \eta;$$

bc est l'angle de contingence ε, et l'angle dièdre acb est l'un des angles supplémentaires θ que forme le plan osculateur avec le plan tangent en n. Le triangle sphérique abc donne

$$\sin i = \sin(i + \eta)\cos\varepsilon + \cos(i + \varepsilon)\sin\varepsilon\cos\theta,$$

ou, en s'en tenant aux termes du premier ordre en ε et η,

$$\eta = \varepsilon\cos\theta \ (*),$$

(*) On peut arriver plus simplement à ce résultat en abaissant du point c une perpendiculaire cI sur ab, et considérant le triangle infinitésimal cIb.

successivement dans ce mineur R_p la première verticale par chacune des trois suivantes :

$$\begin{array}{c|c|c}
c_{p0}+c_{p1}x \quad +\ldots+ c_{pp}x^p & g_p(x) & f_p(x) \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
c_{n-1,0}+c_{n-1,1}x+\ldots+c_{n-1,p}x^p & g_{n-1}(x) & f_{n-1}(x) \\
b_0+b_1x \quad +\ldots+ b_px^p & 0 & -x^0 \\
b_0x \quad +\ldots+ b_{p-1}x^p & 0 & -x^1 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

où $g_p(x)$ et $f_p(x)$ désignent les polynômes de degrés $n-p-1$ et $m-p-1$, qui sont les coefficients de y^p dans les expressions entières

$$\frac{g(y)-g(x)}{y-x}, \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x};$$

nous obtiendrons ainsi trois polynômes que nous représenterons respectivement par

$$V_p(x), \quad G_p(x), \quad F_p(x),$$

et dont les deux derniers ont pour degrés $n-p-1$ et $m-p-1$. Quant au premier $V_p(x)$, son terme plus élevé en x est R_px^p : $V_0(x)$ n'est autre que R.

LEMME.

On a identiquement

$$(2) \qquad V_p(x)=f(x)G_p(x)-g(x)F_p(x).$$

En effet, on peut substituer à la première verticale de $V_p(x)$ celle qu'on obtient en lui ajoutant les verticales suivantes, respectivement multipliées par $x^{p+1}, x^{p+2}, \ldots, x^{m-1}$.

La verticale ainsi modifiée devient

$$\begin{array}{c} c_{p0} + c_{p1}x + \ldots + c_{p,m-1}x^{m-1} \\ \vdots \\ c_{n-1,0} + c_{n-1,1}x + \ldots + c_{n-1,m-1}x^{m-1} \\ g(x) \\ xg(x) \\ \vdots \end{array}$$

Cela posé, puisque les trois déterminants $V_p(x)$, $G_p(x)$, $F_p(x)$ sont du même ordre et ne diffèrent que par la première verticale, il suffit, pour l'exactitude de l'identité (2), que chaque élément de la première verticale de $V_p(x)$ soit égal à la somme des éléments correspondants des premières verticales de $G_p(x)$ et de $F_p(x)$, respectivement multipliés par $f(x)$ et par $-g(x)$. Or, cela est évident pour les $m-n$ derniers éléments; et, si l'on considère l'un quelconque des autres, la relation

$$c_{i0} + c_{i1}x + \ldots + c_{i,m-1}x^{m-1} = f(x)g_i(x) - g(x)f_i(x),$$

qui reste à démontrer, résulte de ce que les deux membres représentent l'un et l'autre le coefficient de y^i dans le développement de l'expression (1).

De l'identité (2) qui, pour $p=0$, se réduit à

$$(3) \qquad R = f(x)G_0(x) - g(x)F_0(x),$$

on déduit immédiatement les théorèmes suivants :

Théorème I.

Pour que les deux équations

$$f(x) = 0, \quad g(x) = 0,$$

aient au moins une racine commune, il faut et il suffit que le déterminant R *soit nul.*

La condition est nécessaire. En effet, R étant indépendant de x, sa valeur sera fournie par le second membre de l'identité (3), quelque valeur qu'on y mette pour x; or si les équations proposées ont une racine commune, en adoptant cette racine pour la valeur attribuée à x, on voit que R est égal à zéro.

La condition est suffisante; car, si R est nul, le second membre de l'identité (3) devra être nul, pour toute valeur de x, et en particulier pour toutes les racines de l'équation $g(x) = 0$. Donc ces n racines doivent satisfaire à l'équation

$$f(x) G_0(x) = 0,$$

et comme le polynôme $G_0(x)$ n'est que du degré $n - 1$, il faut que l'une au moins des racines de $g(x) = 0$ appartienne à l'équation $f(x) = 0$.

Théorème II.

Pour que les équations $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ *aient un nombre de racines communes égal à* p, *il faut et il suffit que le déterminant* R *et que ses mineurs principaux* $R_1, R_2, \ldots, R_{p-1}$, *jusqu'au* $(p-1)^{ième}$ *inclusivement, soient nuls.*

Les conditions sont nécessaires. En effet, l'identité (2) montre que $V_p(x)$ s'annule quand on y remplace x par une racine commune aux équations proposées. Si donc ces équations ont p racines communes, chacun des polynômes $V_0(x), V_1(x), \ldots, V_{p-1}(x)$ sera identiquement nul, puisqu'il doit s'annuler pour p valeurs de x, et que son degré est inférieur à p; donc, en particulier, les coefficients $R, R_1, \ldots, R_{p-1}$ de la plus haute puissance de x dans ces polynômes doivent être nuls.

Les conditions sont suffisantes. En effet, raisonnons

de proche en proche. Supposons d'abord $R = 0$, mais $R_1 \gtrless 0$; puisque R est nul, il y a au moins une racine commune en vertu du premier théorème, et il n'y en a qu'une, car, s'il y en avait deux, on aurait $R_1 = 0$ d'après l'alinéa précédent. Donc, pour que les équations $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ aient *une* racine commune et une seule, il faut et il suffit que R soit nul, sans que R_1 le soit. — Supposons maintenant $R = 0$, $R_1 = 0$, mais $R_2 \gtrless 0$, il y a au moins une racine commune, puisque R est nul, il y en a même deux, sans quoi R_1 serait différent de zéro; enfin il ne saurait y en avoir trois, puisque alors, d'après l'alinéa précédent, R_2 serait nul. Donc, pour que les équations proposées aient *deux* racines communes, et seulement *deux*, il faut et il suffit que R et R_1 soient nuls, sans que R_2 le soit. — On continuerait de même.

Théorème III.

En supposant les conditions du théorème II remplies, les p racines communes sont fournies par l'équation $V_p(x) = 0$; *et les autres racines, qui sont au nombre de m — p pour* $f(x) = 0$ *et au nombre de n — p pour* $g(x) = 0$, *sont données respectivement par les équations* $F_{p-1}(x) = 0$ *et* $G_{p-1}(x) = 0$.

En effet, chacune des p racines communes annule $V_p(x)$, en vertu de l'identité (2). D'ailleurs le polynôme $V_p(x)$ est du degré p, puisque le terme le plus élevé en x est $R_p x^p$ et que R_p n'est pas nul par hypothèse. Donc l'équation $V_p(x) = 0$, donne les p racines communes et pas d'autres.

D'autre part, $V_{p-1}(x)$ étant identiquement nul, on a pour toute valeur de x

$$f(x)G_{p-1}(x) - g(x)F_{p-1}(x) = 0,$$

et en particulier

$$f(x)G_{p-1}(x) = 0,$$

pour toute valeur de x satisfaisant à l'équation $g(x) = 0$; donc les $n - p$ valeurs de x qui annulent $g(x)$ sans annuler $f(x)$ doivent rendre nul le polynôme $G_{p-1}(x)$; mais ce polynôme est de degré $n - p$; donc l'équation $G_{p-1}(x) = 0$ a pour racines les $n - p$ racines de $g(x) = 0$ qui ne se trouvent pas dans $f(x) = 0$.

On verrait de même que les $m - p$ racines de $f(x) = 0$ qui n'appartiennent pas à $g(x)$ sont les racines de l'équation $F_{p-1}(x) = 0$, qui est de degré $m - p$.

CALCUL DES ÉLÉMENTS c_{ik} DU DÉTERMINANT R.

La symétrie de l'expression (1), par rapport à x et à y, prouve d'abord que

(4) $$c_{ki} = c_{ik}.$$

D'autre part, le coefficient de y^k dans (1) est

$$f(x)g_k(x) - g(x)f_k(x),$$

et les polynômes $g_k(x)$, $f_k(x)$ ont évidemment pour expressions

$$g_k(x) = b_{k+1} + b_{k+2}x + b_{k+3}x^2 + \ldots,$$
$$f_k(x) = a_{k+1} + a_{k+2}x + a_{k+3}x^2 + \ldots.$$

Les seconds membres peuvent être prolongés indéfiniment, à condition de remplacer par zéro les quantités b dont l'indice surpasse n, et les quantités a dont l'indice surpasse m. On a donc

$$c_{ik} = a_0 b_{k+i+1} + a_1 b_{k+i} + \ldots + a_i b_{k+1}$$
$$- b_0 a_{k+i+1} - b_1 a_{k+i} - \ldots - b_i a_{k+1},$$

c'est-à-dire

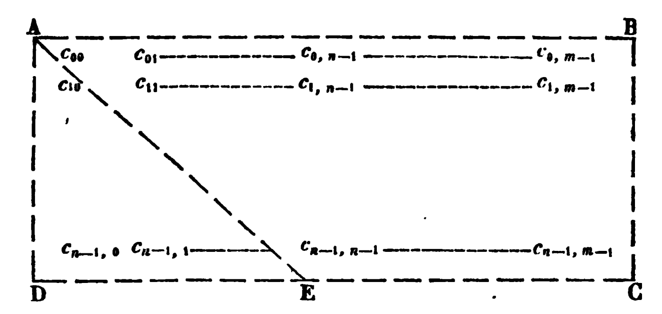
$$c_{ik} = \begin{vmatrix} a_0 & a_{k+i+1} \\ b_0 & b_{k+i+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & a_{k+i} \\ b_1 & b_{k+i} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_i & a_{k+1} \\ b_i & b_{k+1} \end{vmatrix}.$$

On déduit de là

(5) $$c_{0k} = \begin{vmatrix} a_0 & a_{k+1} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix},$$

(6) $$c_{ik} = \begin{vmatrix} a_i & a_{k+1} \\ b_i & b_{k+1} \end{vmatrix} + c_{i-1,\,k+1}.$$

Les trois formules (4), (5) et (6) conduisent à une règle pratique simple pour calculer les éléments c_{ik} qui figurent dans le déterminant R, c'est-à-dire les éléments renfermés dans le tableau rectangulaire



D'abord la formule (4) montre qu'il suffit de calculer les éléments contenus dans le trapèze ABCE, vu que les éléments situés dans le triangle ADE sont égaux à leurs symétriques par rapport à la ligne droite AE.

Puis, la formule (5) prouve que, *pour avoir les éléments de la première horizontale du trapèze, il suffit d'écrire le système bilinéaire*

(7) $$\begin{cases} a_0, & a_1, & a_2, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & a_m, \\ b_0, & b_1, & b_2, & \ldots, & b_n, & 0, & 0, \end{cases}$$

et de former les déterminants du second ordre qui ré-

sultent de la combinaison de la première verticale de ce système avec chacune des verticales suivantes.

Enfin, la formule (6) montre que *l'on obtient les éléments de la $i^{ème}$ horizontale en combinant la $(i+1)^{ième}$ verticale du système bilinéaire avec chacune des verticales suivantes, et ajoutant à chaque déterminant du second ordre ainsi obtenu l'élément qui, dans la partie déjà calculée du trapèze, est situé immédiatement* A DROITE ET AU-DESSUS.

Exemple. — Soit proposé de calculer la résultante des équations

$$x^3+p'x^2+q'x+r'=0,\quad x^2+px+q=0.$$

Du système bilinéaire

$$\begin{matrix} r', & q', & p', & 1, \\ q, & p, & 1, & 0, \end{matrix}$$

on déduit le trapèze

$$\begin{matrix} pr'-qq', & r'-qp', & -q, \\ & q'-pp'-q, & -p. \end{matrix}$$

La résultante, c'est-à-dire la condition pour que les équations aient une racine commune, est donc

$$R=\begin{vmatrix} pr'-qq' & r'-qp' & -q \\ r'-qp' & q'-q-pp' & -p \\ q & p & 1 \end{vmatrix}=0.$$

Pour exprimer que les équations proposées ont deux racines communes, il faut joindre à cette condition la relation

$$R_1=\begin{vmatrix} q'-q-pp' & -p \\ p & 1 \end{vmatrix}=0$$

ou

$$q'-q=p(p'-p),$$

en vertu de laquelle la première se réduit à

$$r' = q(p' - p).$$

On peut, en effet, vérifier, par un calcul direct, que ce sont là les conditions pour que le polynôme $x^3 + p'x^2 + q'x + r'$ soit divisible par le polynôme $x^2 + px + q$.

NOTE SUR LES VRAIES VALEURS DES EXPRESSIONS DE LA FORME $\frac{\infty}{\infty}$;

PAR M. VICTOR ROUQUET,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Marseille.

L'énoncé que l'on donne habituellement est trop général. D'ailleurs il n'est pas difficile, avec un peu d'attention, de reconnaître que la démonstration ordinaire est loin d'être irréprochable. Je me propose dans cette Note de donner un énoncé exact, et une démonstration que je crois rigoureuse, en me bornant au cas élémentaire des fonctions réelles qui ont des dérivées.

LEMME. — *La variable x augmentant indéfiniment, si la dérivée y' d'une fonction y de x tend vers une limite a, le rapport $\frac{y}{x}$ a la même limite a.*

On peut supposer que la variable x augmente indéfiniment par des valeurs positives; car, si cela n'était pas, on remplacerait x par $-x$, auquel cas y' se changerait en $-y'$.

Pour démontrer la proposition, il suffit de prouver que l'on peut trouver une valeur de x telle que, pour

toutes les valeurs de x qui lui sont supérieures, le rapport $\frac{y}{x}$ soit compris entre $a-\alpha$, et $a+\alpha$, α étant un nombre positif donné, aussi petit que l'on voudra.

A cet effet, prenons un nombre positif α' moindre que α. Puisque la dérivée y' a pour limite a, quand x augmente indéfiniment, on peut assigner une valeur x_0 telle que, pour les valeurs de x supérieures, y' soit comprise entre $a-\alpha'$ et $a+\alpha'$, c'est-à-dire telle que les inégalités

$$y'-(a-\alpha')>0 \quad \text{et} \quad y'-(a+\alpha')<0$$

soient satisfaites pour $x>x_0$.

Alors les fonctions

$$y-(a-\alpha')x+k \quad \text{et} \quad y-(a+\alpha')x-k,$$

où k désigne une constante positive, et qui ont respectivement pour dérivées $y'-(a-\alpha')$ et $y'-(a+\alpha')$, seront, la première croissante à partir de x_0, et la seconde décroissante à partir de cette valeur; et, comme on peut déterminer la constante k de façon que, pour $x=x_0$, la première soit positive et la seconde négative, la première des deux fonctions sera positive pour toutes les valeurs de x supérieures à x_0, la seconde étant négative pour les mêmes valeurs, en sorte que les inégalités

$$\frac{y}{x}>a-\alpha'-\frac{k}{x} \quad \text{et} \quad \frac{y}{x}<a+\alpha'+\frac{k}{x}$$

auront lieu pour $x>x_0$.

Cela posé, assujettissons encore la variable x à la condition

$$\frac{k}{x}<\alpha-\alpha', \quad \text{d'où} \quad x>\frac{k}{\alpha-\alpha'}.$$

Alors, pour les valeurs de x supérieures à la fois à x_0

et à $\frac{k}{\alpha - \alpha'}$, on aura, *a fortiori*,

$$\frac{y}{x} > a - \alpha' - (\alpha - \alpha'), \quad \text{ou} \quad > a - \alpha,$$

et

$$\frac{y}{x} < a + \alpha' + (\alpha - \alpha') \quad \text{ou} \quad < a + \alpha.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

THÉORÈME. — *Soit $\frac{y}{z}$ une fraction dont les deux termes, fonctions d'une même variable x, augmentent indéfiniment quand x tend vers une valeur finie x_0, ou augmente elle-même indéfiniment :*

1° *Si le rapport $\frac{y'}{z'}$ des dérivées des deux termes tend vers une limite a, on aura*

$$\lim \frac{y}{z} = a.$$

2° *Si le rapport $\frac{y'}{z'}$ augmente indéfiniment, il en sera de même du rapport $\frac{y}{z}$.*

y et z étant des fonctions d'une même variable x, on peut regarder y comme une fonction de z, dont la dérivée par rapport à z soit $y'_z = \frac{y'}{z'}$.

D'après le lemme, z augmentant indéfiniment, si $y'_z = \frac{y'}{z'}$ tend vers une limite a, on a

$$\lim \frac{y}{z} = a.$$

Si $\frac{y'}{z'}$ augmente indéfiniment, le rapport inverse $\frac{z'}{y'}$

tend vers zéro, et alors, d'après le cas précédent, $\lim \frac{z}{y} = 0$, ce qui démontre que le rapport inverse $\frac{y}{z}$ augmente indéfiniment.

Remarques. — Pour chercher la vraie valeur d'une fraction dont les deux termes sont fonctions d'une même variable et deviennent infinis pour une même valeur de cette variable, on peut donc substituer au rapport en question celui des dérivées des deux termes; de même, à ce dernier, celui des dérivées secondes, et ainsi de suite; dans ce sens que si l'on trouve pour l'un de ces rapports une valeur déterminée finie ou infinie, ce résultat s'applique aux rapports précédents.

Mais la réciproque peut ne pas être vraie. La fraction $\frac{x + \cos x}{x + \sin x}$, où l'on fait augmenter x indéfiniment, en offre un exemple bien connu.

NOTICE
SUR LA VIE ET LES TRAVAUX DE VICTOR-AMÉDÉE LE BESGUE,

Correspondant de l'Institut (Académie des Sciences),
Professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Bordeaux (*).

Victor-Amédée Le Besgue naquit à Grandvilliers (Oise) le 2 octobre 1791. Il commença ses études à Amiens, et les termina au collége de Beauvais, où il eut pour condisciple M. Alexandre, l'helléniste, avec lequel il noua, malgré la différence d'âge, des relations d'amitié, qu'ils ont conservées toute leur vie.

(*) Cette Notice m'a été communiquée par M. J. Houël, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux. (*Voir* aussi le *Bullettino* publié par M. B. Boncompagni, t. IX, numéro de septembre 1876, p. 554-594.)

Ses études achevées, Le Besgue ne put se soustraire aux exigences du service militaire, et il fut incorporé sous les drapeaux vers la fin de l'année 1809. Il y passa une année, employé dans les bureaux de l'Administration. Décidé à rentrer dans la vie civile, il parvint, à force de sacrifices et avec l'aide d'un de ses parents, à se faire remplacer, et il débuta dans l'enseignement en qualité de maître d'études au lycée de Reims. Après trois ou quatre années passées à Saint-Quentin et à Abbeville, il accepta un emploi de précepteur dans une famille anglaise, et se rendit à Londres, où il séjourna une année. D'Angleterre il passa, dans les mêmes conditions, en Russie, où il resta jusqu'en 1830, époque de son retour en France.

Sur la recommandation de M. Alexandre, alors inspecteur général des études, Le Besgue obtint de Poisson, chargé, comme membre du Conseil royal de l'Instruction publique, de la direction générale de l'enseignement mathématique, un emploi de chargé de cours au collége royal de Nantes, puis de professeur au collége d'Épinal, où il resta deux années.

En 1834, il vint suivre à Paris les cours de la Sorbonne, dans l'intention de concourir pour l'agrégation. Malgré les instances de ses amis, il ne donna pas suite à ce projet, et fut envoyé à Neufchâteau; il y passa les années 1835 et 1836.

Il adressait souvent à Poisson des Notes sur diverses questions d'Analyse, et le célèbre géomètre lui portait un vif intérêt. M. Cournot, ayant été transféré, vers cette époque, de la chaire de Mathématiques de la Faculté de Lyon à celle de Grenoble, et ayant été nommé, en outre, recteur de l'Académie dont cette ville est le chef-lieu, demanda qu'on lui adjoignît un suppléant. Le Besgue fut désigné pour ce poste, et entra ainsi dans

l'enseignement supérieur, où sa position fut bientôt régularisée par l'obtention du grade de docteur ès sciences (1837). La Faculté des Sciences de Bordeaux ayant été organisée à la fin de 1838, Le Besgue fut appelé à y occuper la chaire de Mathématiques pures, et il la conserva jusqu'à la fin de l'année 1858, où il se décida à prendre sa retraite.

Le Besgue vint alors se fixer pour deux ou trois ans à Paris, où l'appelaient des intérêts de famille. C'est pendant ce séjour qu'il entreprit, avec l'appui du prince Alphonse de Polignac, la publication d'un Traité sur la Théorie des nombres, dont il n'a paru, malheureusement, que l'Introduction (*).

A la fin de 1861, il revint à Bordeaux pour échapper à la rigueur des hivers de Paris. Toujours animé du même zèle pour la Science, et ne pouvant se résigner à l'abandon où les professeurs français laissent la Théorie des nombres, il remonta dans son ancienne chaire, pour donner une série de conférences, auxquelles assistèrent avec assiduité les professeurs de Mathématiques de la Faculté et du Lycée. Il exposa, dans ces leçons, les principes de la théorie des congruences, la théorie des résidus quadratiques et celle de la division du cercle d'après Gauss. Malheureusement le cours présentait des lacunes, que les instances de ses auditeurs ne purent le décider à combler, et l'espoir qu'ils avaient conçu de doter, par la publication de ces leçons, notre pays d'un traité élémentaire de la Théorie des nombres mis au courant de la science actuelle, ne put se réaliser.

Après être resté deux années à Bordeaux, Le Besgue repartit pour Paris, qu'il quitta bientôt pour aller habiter, tour à tour, Bordeaux, Agen, Angoulême, Dax,

---

(*) N° 2 du catalogue.

Pau. Les nombreux articles qu'il a publiés, vers cette époque, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, témoignent que son activité scientifique ne s'était pas éteinte avec les années (*).

Au mois de mai 1875, il fut atteint, à Pau, d'une indisposition qui présenta dès l'abord des symptômes alarmants. Sa fille accourut auprès de lui, et le ramena à Bordeaux, où il termina, le 10 juin (**), à 9 heures du soir, sa longue et laborieuse carrière.

Très-simple de manières, d'un caractère plein de franchise et d'indépendance, d'une droiture à toute épreuve, ne cherchant jamais les occasions de se mettre en évidence, Le Besgue vivait très-retiré, constamment occupé de ses études favorites. En 1839, il fut présenté en troisième ligne pour une place de correspondant de l'Académie des Sciences; M. Chasles, porté en première ligne, fut élu (***). Une nouvelle vacance étant survenue en 1847, Le Besgue fut choisi à la presque unanimité des suffrages, dans la séance du 8 février 1847 (****). En 1845 il avait reçu la décoration de la Légion d'honneur.

Catalogue des travaux de V.-A. Le Besgue.

Ouvrages détachés.

1. *Exercices d'Analyse numérique, extraits, commentaires et recherches relatifs à l'Analyse indéterminée et à la Théorie des nombres*. Paris, 1859. In-8, 164 p.

(*) Nos 57-117 du catalogue.

(**) Et non le 12, comme l'indiquent, par erreur, les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*.

(***) Les candidats proposés dans la séance du 29 avril étaient MM. Chasles, Hamilton, Le Besgue, Ostrogradsky et Richelot. L'élection eut lieu le 6 mai suivant; M. Chasles obtint 31 voix, M. Hamilton 4, M. Le Besgue 2.

(****) Le Besgue obtint 42 voix, Ostrogradsky 6, Laurent 2.

2. *Introduction à la Théorie des nombres.* Paris, 1862, gr. in-8, 104 p.

Bulletin du Nord, Journal scientifique et littéraire, etc., publié à Moscou, par G. Le Cointe de Laveau.

3. *Extrait d'un Mémoire inédit sur les congruences d'un degré quelconque, et à une seule inconnue.* 2e année, 1829; 3 articles, ensemble 50 p. in-8.

Bulletin de Férussac.

4. *Note sur les fractions continues périodiques* (1831, p. 155-159).

Journal de Crelle.

5. *Intégration d'un système d'équations linéaires du $n^{ième}$ ordre,* t. XV, 1836, p. 185-190.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.

6. *Note sur l'équation* $x^p = 1$, t. V, p. 722-725; 20 novembre 1837.

7. *Formule pour la résolution de l'équation auxiliaire de degré m, relative à l'équation* $x^p = 1$, *en supposant* $p = m\varpi + 1$ *et premier,* t. XVIII, p. 697-699; 25 avril 1844.

8. *Note sur la résolution de l'équation binôme* $x^p = 1$, *p étant un nombre premier,* t. XXXVIII, p. 914-916; 22 mai 1854.

9. *Décomposition d'un nombre premier p ou de son double en m carrés,* $m > 2$ *divisant* $p - 1$, t. XXXIX, p. 593-595; 25 septembre 1854.

10. *Note sur les congruences,* t. LI, p. 9-13, 2 juillet 1860.

11. *Note sur les nombres de Bernoulli,* t. LVIII, p. 854-855; 9 mai 1864.

12. *Addition à la Note sur les nombres de Bernoulli,* t. LVIII, p. 937-938; 23 mai 1864.

13. *Détermination de la valeur du symbole* $\left(\frac{b}{a}\right)$, *dû à* Jacobi, t. LIX, p. 940-944; 5 décembre 1864.

14. *Extension d'une formule de Gauss. Résolation d'une équation biquadratique à quatre inconnues*, t. LIX, p. 1067-1069; 26 décembre 1864.

14 *bis*. *Complément de la Note du 5 décembre* 1864, p. 941, t. LX, p. 377-379; 20 février 1865.

15. *Théorème pour la résolution des congruences binômes à module premier. Application à la construction du* Canon arithmeticus, t. LXI, p. 1041-1044; 11 décembre 1865.

16. *Nouveau théorème sur la résolution des équations binômes à module premier*, t. LXII, p. 20-23; 2 janvier 1866.

17. *Sur une congruence du deuxième degré à plusieurs inconnues*, t. LXII, p. 868-872; 26 avril 1866.

18. *Sur la classification des racines des congruences binômes. Application à la construction du* Canon arithmeticus *de* Jacobi, t. LXIII, p. 1100-1103; 24 décembre 1866.

19. *Réduction au second degré d'une équation indéterminée en x et y, du troisième degré relativement à x ou y*, t. LXIV, p. 1267-1268; 24 juin 1867.

20. *Théorème sur les racines primitives*, t. LIV, p. 1268-1269; 24 juin 1867.

21. *Formule donnant le volume du tétraèdre maximum, compris sous des faces de grandeurs données*, t. LXVI, p. 248-251; 10 février 1868.

22. *Sur une identité qui conduit à toutes les solutions de l'équation $t^2 = x^2 + y^2 + z^2$*, t. LXVI, p. 396-398; 2 mars 1868.

23. *Démonstration de la méthode de Jacobi pour la formation de la période d'une racine primitive*, t. LXX, p. 1243-1251; 13 juin 1870.

Journal de Liouville.

1re Série.

24. *Théorème sur les quantités incommensurables*, t. I, p. 266-268; 1836.

25. *Recherches sur les nombres*, t. II, p. 253-292, 1837; t. III, p. 113-144, 1838; t. IV, p. 9-59, 1839.

26. *Thèses de Mécanique et d'Astronomie*, t. II, p. 337-365; 1837.

27. *Détermination des centres de gravité des fuseaux et des onglets de révolution*, t. IV, p. 60-62; 1839.

28. *Sommation de quelques séries*, t. V, p. 42-71; 1840.

29. *Note sur le théorème de Fermat*, t. V, p. 184-185; 1840.

30. *Note sur une formule de M. Cauchy*, t. V, p. 186-188; 1840.

31. *Démonstration de l'impossibilité de résoudre l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$ en nombres entiers*, t. V, p. 276-279; 1840.

32. *Résolution de l'équation du second degré à une inconnue par les fractions continues*, t. V, p. 281-310; 1840.

33. *Addition à la Note sur l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$*, t. V, p. 348-349; 1840.

34. *Mémoire sur une formule de Vandermonde, et son application à la démonstration d'un théorème de M. Jacobi*, t. VI, p. 17-35; 1841.

35. *Démonstration de quelques théorèmes relatifs aux résidus et aux non-résidus quadratiques*, t. VII, p. 137-159; 1842.

36. *Théorèmes nouveaux sur l'équation indéterminée*

$$x^5 + y^5 = az^5,$$

t. VIII, p. 49-70; 1843.

37. *Note sur l'intégration de l'équation différentielle*

$$(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)\,dy + (C + C'x + C''y)\,dx = 0,$$

t. X, p. 316-319; 1845.

38. *Démonstration d'une formule de M. Dirichlet; Remarques sur quelques expressions du nombre* π; t. XI, p. 76-80; 1846.

39. *Sur les arcs à différence rectifiable et les zones à différence planifiable*, t. XI, p. 331-335; 1846.

40. *Extrait d'une Lettre adressée à M. Liouville*, t. XI, p. 336-337; 1846.

41. *Remarques sur l'équation* $y'' + \frac{m}{x}y' + ny = 0$, t. XI, p. 338-340; 1846.

42. *Démonstration nouvelle et élémentaire de la loi de réciprocité de Legendre, par M. Eisenstein, précédée et suivie de remarques sur d'autres démonstrations qui peuvent être tirées du même principe;* t. XII, p. 457-473; 1847.

43. *Sur le symbole* $\left(\frac{a}{b}\right)$ *et quelques-unes de ses applications*, t. XII, p. 497-517; 1847.

44. *Suite du Mémoire sur les applications du symbole* $\left(\frac{a}{b}\right)$, t. XV, p. 215-237; 1850.

45. *Résolution des équations biquadratiques*

(1), (2) $z^2 = x^4 \pm 2^m y^4$, (3) $z^2 = 2^m x^4 - y^4$,

(4), (5) $2^m z^2 = x^4 \pm y^4$,

t. XVIII, p. 73-86; 1853.

46. *Démonstration de quelques formules d'un Mémoire de M. Jacobi* (Journal de Mathématiques, de M. Crelle, t. XXX, p. 166), t. XIX, p. 289-300; 1854.

47. *Note sur le* Canon arithmeticus *de Jacobi*, t. XIX, p. 334-336; 1854.

2e Série.

48. *Sur l'intégrale* $\int_0^1 \frac{1-\varphi^\alpha}{1-\varphi} d\varphi = \sum_1^\infty \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\alpha}\right)$, ou $\alpha < 1$, t. I, p. 377-378; 1856.

49. *Sur la réduction des formes quadratiques définies positives à coefficients réels quelconques. Démonstration du théorème de Seeber sur les réduites des formes ternaires*, t. I, p. 401-410; 1856.

50. *Démonstration de ce théorème : tout nombre impair est la somme de quatre carrés dont deux sont égaux;* t. II, p. 149-152; 1857.

51. *Note sur la résolution de l'équation du quatrième degré par les fonctions elliptiques*, t. III, p. 391-394; 1858.

52. *Démonstration de l'irréductibilité de l'équation aux racines primitives de l'unité*, t. IV, p. 105-110; 1859 (*).

53. *Nombre de solutions d'une congruence du premier degré à plusieurs inconnues*, t. IV, p. 366; 1859.

54. *De la composition des formes binaires du second degré*, par M. G. Lejeune-Dirichlet; traduit du latin, par V.-A. Le Besgue; t. IV, p. 389-398; 1859.

55. *Note à cette traduction*, t. IV; 1859.

56. *Extrait d'une Lettre de M. Le Besgue à M. Liouville*, t. VII, p. 417-420; 1862.

Nouvelles Annales de Mathématiques.

1re Série.

57. *Rectification relative aux racines complexes des équations algébriques*, t. III, p. 145-146; 1844.

58. *Remarque sur les lignes incommensurables*, t. III, p. 436-437; 1844.

59. *Note sur les nombres parfaits*, t. III, p. 552-553; 1844.

60. *Sur la convergence des séries*, t. IV, p. 66-70; 1845.

61. *Théorie des points associés dans l'ellipse et théorème de Fagnano*, t. IV, p. 573-575; 1845.

62. *Sur l'inscription des polygones réguliers de* 15 *et de* 17 *côtés*, t. V, p. 683-689; 1846.

63. *Vérification analytique de la formule, question* 69. (II, 327). T. VI, p. 350-352; 1847.

64. *Sur la question* 70, t. VI, p. 427-431; 1847.

65. *Résolution en nombres entiers de l'équation*

$$x^2 + y^2 = z^2 + t^2,$$

t. VII, p. 37-39; 1848.

66. *Sur les cônes du second degré et sur les ellipses sphériques*, t. VII, p. 150-155; 1848.

(*) Il a paru de ce Mémoire une traduction italienne (*Annali di Matematica*, 1re série, t. II; 1859).

67. *Remarque sur la question* 161 (Théorème de Joachimsthal), t. VII, p. 225-227; 1848.

68. *Théorème de Newton sur les asymptotes*, t. VII, p. 385-390; 1848.

69. *Sur l'équation qui donne les axes principaux des surfaces à centre du second degré*, t. VII, p. 404-407; 1848.

70. *Théorème sur les surfaces courbes algébriques*, t. VIII, p. 22-27; 1849.

71. *Extraits des Exercices d'Analyse numérique*, t. VIII, p. 81-86 et 347-353; 1849.

72. *Résolution générale des équations des quatre premiers degrés*, par M. P.-G. Eisenstein. (Journal de M. Crelle, t. XXVI, p. 81.) Traduit par M. Le Besgue, t. VIII, p. 110-113; 1849.

73. *Sur l'hexagramme mystique*, t. VIII, p. 139-142; 1849.

74. *Sur l'équation du troisième degré*, t. VIII, p. 219-220; 1849.

75. *De la plus courte distance de deux droites*, t. VIII, p. 236-242; 1849.

76. *Note sur l'article relatif à la plus courte distance de deux droites, et sur un théorème de M. Dupin* (voir t. VIII, p. 236), t. VIII, p. 381-383; 1849.

77. *Arithmologie. Note sur un système d'équations indéterminées* (voir t. I, p. 387), t. IX, p. 49-51; 1850.

78. *Sur l'impossibilité, en nombres entiers, de l'équation* $x^m = y^2 + 1$, t. IX, p. 178-181; 1850.

79. *Quelques mots sur la géométrie sphérique*, t. IX, p. 327-329; 1850.

80. *Note sur les congruences*, t. IX, p. 436-439; 1850.

81. *Sur les surfaces orthogonales*, t. X, p. 265-274; 1851.

82. *Sur les racines primitives de l'équation* $x^n - 1 = 0$, t. XI, p. 417-424; 1852.

83. *Démonstration d'une formule d'Euler, sur les diviseurs d'un nombre*, t. XII, p. 232-235; 1853.

84. *La trigonométrie sphérique, simplifiée dans ses formules et ses démonstrations;* par MM. Cornélius Keogh et V.-A. Le Besgue, t. XII, p. 304-312; 1853.

85. *Sur le rapport de l'arc à la corde,* t. XIII, p. 136-137; 1854.

86. *Arithmologie. Théorème sur une équation du second degré,* t. XIII, p. 412-413; 1854.

87. *Éléments d'Algèbre à l'usage des candidats aux écoles du Gouvernement;* par S.-F. Lacroix, membre de l'Institut. 21e édition, revue, corrigée et annotée, conformément aux nouveaux *Programmes de l'enseignement dans les Lycées,* par M. Prouhet, professeur de Mathématiques. Paris, 1854, in-8 de 520 pages. T. XIII, p. 447-448; 1854.

88. *Démonstration du théorème de Lexell,* t. XIV, p. 24-26; 1855.

89. *Remarques diverses sur les nombres premiers,* t. XV, p. 130-134 et 236-239; 1856.

90. *Questions proposées,* t. XV, p. 230; 1856.

91. *Remarque,* t. XV, p. 352; 1856.

92. *Sur un théorème des nombres* (Legendre, *Théorie des nombres,* t. II, p. 144); t. XV, p. 403-407; 1856.

93. *Sur la question* 365 (voir page 125), t. XVI, p. 262; 1857.

94. *Sur l'aire du triangle sphérique,* t. XVI, p. 319-321; 1857.

95. *Sur la résolution des équations du quatrième degré,* t. XVII, p. 386-390; 1858.

96. *Note (communiquée par M. Le Besgue),* t. XVII, p. 465; 1858.

97. *Trouver un triangle dont les côtés et la surface forment une équidifférence en nombres rationnels x, $x+y$, $x+2y$, $x+3y$,* t. XVIII, p. 44-45; 1859.

98. *Sur la valeur de la somme* $\frac{1}{a^m}+\frac{1}{b^m}+\frac{1}{c^m}+\ldots+\frac{1}{l^m}$, *$a$, b, ..., l étant les termes d'une progression arithmétique croissante,* t. XVIII, p. 82-84; 1859.

99. *Remarques sur quelques séries,* t. XVIII, p. 433-437 et 460-461; 1859.

100. *Théorème sur cinq nombres entiers consécutifs*, t. XIX, p. 112-115; 1860.

101. *Remarque sur l'article de la page* 112, t. XIX, p. 135-136; 1860.

102. *Généralisation d'un théorème de M. M. Roberts*, t. XX, p. 63-66; 1861.

2e Série.

103. *Arithmologie élémentaire. Application à l'Algèbre*, t. I, p. 219-227, 254-266 et 406-413; 1862.

104. *Questions proposées*, t. I, p. 383-384; 1862.

105. *Sur l'impossibilité de quelques équations indéterminées*, t. II, p. 68-77; 1863.

106. *Note sur la transformation des coordonnées*, t. II, p. 392-397; 1863.

107. *Sur deux questions de maximum*, t. II, p. 433-449; 1863.

108. *Sur les cercles bitangents à une conique*, t. IV, p. 161-165; 1865.

109. *Questions proposées*, t. V, p. 191-192; 1866.

110. *Note sur le lieu des foyers des sections centrales des surfaces du second degré*, t. V, p. 444-449; 1866.

111. *Note sur quelques équations indéterminées*, t. VIII, p. 452-454; 1869.

112. *Note sur les questions* 894 *et* 961 (p. 312 et 528), t. VIII, p. 555-557; 1869.

113. *Sur l'équation du troisième degré*, t. IX, p. 529-531; 1870.

114. *Question proposée* 1046, t. X, p. 557; 1871.

115. *Solution de questions proposées dans les* Nouvelles Annales, t. XI, p. 83-86 et 516-519; 1872.

116. *Sur les développements de* $\sin na$, $\cos na$, *suivant les puissances de* $2\cos a$ *et* $2\sin a$, t. XII, p. 425-431; 1873.

117. *Question* 1128, t. XIII, p. 111-112; 1874.

Annali di Scienze matematiche e fisiche,
compilati da B. Tortolini.

118. *Sur un problème traité par Léonard de Pise dans son* Flos, *et relatif à une équation de troisième degré. Extrait d'une Lettre adressée par M. Le Besgue*, t. VI, p. 155-160; 1855.

Annali di Matematica pura ed applicata,
pubblicati da B. Tortolini.

119. *Intorno ad un problema indeterminato.* Lettere indirizzate dal sig. V. A. Le Besgue a D. B. Boncompagni, t. V, p. 328-330; 1863.

Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles
de Bordeaux.

120. *Théorème sur les ellipsoïdes associés analogue à celui de Fagnano sur les arcs d'ellipse*, t. II, p. 247-252; 1863.

121. *Tables diverses pour la décomposition des nombres en leurs facteurs premiers*, t. III, p. 1-37; 1864.

122. *Tables donnant pour la moindre racine primitive d'un nombre premier, ou puissance d'un nombre premier : 1° les nombres qui correspondent aux indices; 2° les indices des nombres premiers et inférieurs aux modules.* T. III, p. 231-274; 1865.

Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche
e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni.

123. *Notice sur les Notes et Mémoires insérés dans le* Journal de Mathématiques *de M. Liouville, jusqu'à présent* (1860), par V.-A. Le Besgue. (Ouvrage posthume). T. IX, p. 574-582; 1876.

124. *Note sur les Opuscules de Léonard de Pise.* (Ouvrage posthume). T. IX, p. 583-594; 1876.

ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE TURIN.

PROGRAMME DU PRIX BRESSA.

Le testament de M. César-Alexandre Bressa, Docteur en Médecine et Chirurgie, en date du 4 septembre 1835, contient les dispositions suivantes :

« J'institue mon héritière universelle en mes biens présents et futurs, après que tous les différents legs auront été acquittés, l'Académie Royale des Sciences de Turin, qui pourra se faire représenter par son Secrétaire perpétuel, ou par un fondé de procuration, élu à cet objet par les Membres résidents.

» Aussitôt après la cessation du droit d'usufruit constitué, en faveur de Mme Claudine-Aimée Dupêché, sur les biens compris dans la succession, l'Académie des Sciences de Turin entrera en possession desdits biens, et pourra vendre les immeubles, placer les capitaux selon ce qu'elle croira être de son intérêt, et avec le revenu de tous ces biens elle établira un prix biennal qui alternera de la manière suivante :

» Le revenu net des deux premières années formera le prix à adjuger au savant, à quelque nation qu'il appartienne, qui, pendant les quatre années précédentes, aura fait la découverte la plus éclatante et la plus utile, ou qui aura produit l'ouvrage le plus célèbre en fait de sciences physiques et expérimentales, Histoire naturelle, Mathématiques pures et appliquées, Chimie, Physiologie et Pathologie, sans exclure la Géologie, l'Histoire, la Géographie et la Statistique.

» Le revenu net des deux années suivantes sera adjugé au savant italien qui, au jugement de la même Académie de Turin, aura fait dans les quatre dernières années la découverte la plus importante, ou qui aura publié l'ouvrage le plus considérable en Italie sur quelqu'une des sciences sus-énoncées, et ainsi de suite dans le même ordre. »

L'Académie ne se dissimule pas la grave responsabilité que lui impose l'acte généreux du Dr Bressa en l'appelant à prononcer un jugement sur les productions de l'esprit humain, qui paraîtront en quelque partie que ce soit de la vaste étendue de presque toutes les sciences positives. Elle a cru néanmoins devoir répondre à la confiance que le testateur lui a libéralement accordée, en s'engageant à exécuter fidèlement les dispositions contenues dans son testament, dicté par la louable intention d'aider au développement des sciences.

L'usufruit établi sur la succession Bressa ayant cessé au mois de juillet 1876, il s'ensuit que le premier terme biennal doit embrasser les années 1877 et 1878.

Le premier prix sera donc adjugé en 1879 au savant, de quelque pays qu'il soit, qui, pendant les quatre années précédentes, c'est-à-dire du 1er jour de janvier 1875 jusqu'au dernier jour de décembre 1878, aura fait la découverte la plus éclatante et la plus utile, ou qui aura publié l'ouvrage le plus célèbre en fait de sciences mathématiques et de sciences expérimentales, telles que la Physique, la Chimie, la Physiologie, ainsi qu'en matière d'Histoire naturelle, y compris la Géologie, de Pathologie, d'Histoire, de Géographie et de Statistique.

Pour se conformer à l'esprit du testament du Dr Bressa, l'Académie choisira ce qu'elle croira le meilleur parmi les découvertes et parmi les ouvrages qui auront été publiés, sans distinction entre ceux qui lui auront été pré-

sentés par l'auteur et ceux qui ne l'auront pas été. Elle n'entend s'assujettir à d'autres liens que ceux qui tiennent aux limites de temps prescrites par le testateur, et au sentiment de délicatesse qui défend d'être juge dans sa propre cause.

Le prix ne pourra être adjugé à aucun des Membres nationaux de l'Académie tant résidents que non résidents.

Le prix à adjuger pour la première fois, et attribué aux quatre années de 1875 à 1878, sera de 12 000 francs.

Dans l'année 1881, on adjugera le deuxième prix Bressa pour les quatre années, de 1877 à 1880, avec les mêmes règles sus-énoncées; mais, d'après le testament, ce deuxième prix ne pourra être remporté que par un savant italien. Ainsi chaque quatre ans le prix Bressa sera dévolu à un savant à quelque nation qu'il appartienne, et chaque quatre ans à un savant italien, suivant un alternat régulier entre un prix universel et un prix national.

Turin, le 7 décembre 1876.

Le Président de l'Academ

FREDERIC SCLOPIS.

Le Secrétaire de la Classe des Sciences physiques et mathématiques,

ASCANIO SOBRERO.

Le Secrétaire de la Classe des Sciences morales, historiques et philologiques,

GASPARE GORRESIO.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours de Mathématiques élémentaires.

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, avec de nombreux exercices, par *F. J. C.* Chez les éditeurs : Tours, Alfred Mame et fils, imprimeurs-libraires. Paris, Poussielgue frères, rue Cassette, 27 (1876).

Le Livre intitulé *Éléments de Géométrie descriptive*, rédigé, avec tant de talent, par le frère Gabriel-Marie de l'institut des Frères de la doctrine chrétienne, clôture le cours de Mathématiques élémentaires, dont les diverses parties ont eu, dès leur apparition, un succès si mérité et toujours soutenu dans le monde scolaire.

Le savant fondateur des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, ayant bien voulu nous confier l'analyse des *Eléments de Géométrie descriptive* de l'institut des frères, nous avons accepté avec reconnaissance, et comme un témoignage de bienveillance et d'affection de notre ancien et vénéré maître, ce petit travail, qui nous a procuré le plaisir de lire un livre de Mathématiques véritablement élémentaire.

Le premier Chapitre renferme, sous le titre de *notions préliminaires*, un exposé méthodique des principes; les définitions y sont données avec une clarté qui ne laisse rien à désirer; on y voit les conventions nécessaires à l'intelligence d'une épure, et la série des théorèmes sur le point, la droite et le plan, présentés avec ordre, de manière qu'il ne reste point de vague dans l'esprit, et, pour que le lecteur soit bien pénétré de ces principes, ce premier Chapitre se termine par un résumé qui les embrasse tous.

Le deuxième Chapitre donne les problèmes accoutumés sur les traces des droites et leur emploi, les plans et intersections, les droites et plans parallèles ou perpendiculaires, et la vraie grandeur des droites. Les cas particuliers y abondent.

Les méthodes diverses, telles que les changements de plans de projections, les rotations, les rabattements, remplissent le Chapitre troisième.

Les angles formés par les droites et les plans, ainsi que les tétraèdres, font l'objet du Chapitre quatrième.

Les problèmes fondamentaux exposés dans les Chapitres précédents sont, dans un cinquième Chapitre, appliqués à la circonférence, à la représentation des corps réguliers ou non, de forme géométrique, aux sections planes faites dans les prismes droits et obliques, à la pyramide, et enfin de nombreux exercices bien choisis, et le plus souvent originaux, c'est-à-dire ne se rencontrant pas dans les autres Traités, complètent la première Partie des *Éléments de Géométrie descriptive*.

La deuxième Partie traite des surfaces courbes.

Le premier Chapitre contient une classification des surfaces, des théorèmes sur les plans tangents et la définition du contour apparent d'une surface, soit par rapport à un point fixe donné, à une direction donnée, et sur un plan de projection.

Le Chapitre deuxième est affecté à la représentation des surfaces du second degré. On y trouve le cylindre, le cône, et les surfaces de révolution avec les problèmes fondamentaux qui s'y rapportent.

Les problèmes habituels donnés sur les plans tangents aux surfaces constituent le Chapitre troisième.

Le Chapitre quatrième s'occupe des sections planes faites dans les surfaces, et le cinquième des intersections, les unes par les autres, des surfaces polyédriques et des surfaces courbes.

Et enfin des énoncés d'exercices nouveaux sur l'ensemble des Chapitres complètent la deuxième Partie de l'Ouvrage.

Les figures sont bien placées, de manière que le lecteur puisse les voir en même temps que le texte, et les épures relatives aux diverses questions d'une certaine complication sont claires et intelligibles, qualités qui ne se rencontrent pas toujours dans la plupart des livres qui traitent de cette matière.

Dans la troisième Partie se trouvent les plans côtés. Des définitions bien posées et deux ou trois théorèmes conduisent

l'auteur à la solution immédiate de quelques-uns des problèmes déjà traités dans la première Partie. Trois problèmes sur les surfaces topographiques, et des énoncés d'exercices bien choisis terminent cette troisième Partie. Parmi ces problèmes s'en trouvent qui ont été proposés pour l'examen oral de l'École Centrale.

Une quatrième Partie traite des applications diverses de la Géométrie descriptive. On y voit d'abord un Chapitre tout entier affecté au tracé des ombres, et divers problèmes relatifs à l'ombre au soleil, ou celle obtenue par les rayons lumineux parallèles. On y distingue l'ombre portée sur un plan de projection, par une courbe, par une surface plane polygonale et quelconque; par une pyramide, l'ombre portée par une pyramide sur une autre pyramide, la détermination de l'ombre propre d'une sphère, et de l'ombre portée de cette sphère sur un des plans de projection, dans le cas de la sphère éclairée par des rayons parallèles, et dans celui où elle l'est par un point lumineux; l'ombre portée sur un plan horizontal par un cylindre de révolution dont une génératrice est sur le plan; la détermination de l'ombre portée sur le plan sécant d'un tronc de cône de révolution à axe vertical, lorsque le plan sécant est perpendiculaire au plan vertical; la détermination de l'ombre portée d'une niche demi-cylindrique.

Un deuxième Chapitre est consacré aux constructions. Ce sont en premier lieu des notions sur la *coupe des pierres*, où l'on trouve des problèmes concernant la détermination de l'intersection de deux murs en talus dont les pentes sont données; la *descente droite* ou voûte cylindrique à génératrices inclinées dont la projection horizontale est perpendiculaire aux horizontales de la *face de tête;* la *porte biaise* dans un mur en talus avec son développement; l'emploi de l'hélice, la représentation de la vis à filet carré, et celle de la vis à filet triangulaire. Viennent ensuite des notions sur *la charpente*.

Un troisième Chapitre s'occupe de la *perspective;* on y remarque les définitions et quelques théorèmes qui servent de principes à la *perspective linéaire,* trois moyens d'obtenir la

perspective d'un point, des problèmes sur la perspective d'une figure plane quelconque située sur le plan horizontal avec trois dispositions des données; les perspectives des points situés au-dessus du plan horizontal; les problèmes sur la perspective d'une figure géométrique et d'un corps de révolution ; l'échelle des longueurs, l'échelle des profondeurs ou éloignement, l'échelle des hauteurs et le procédé pour obtenir une perspective agrandie. Comme applications des principes exposés dans le Chapitre, on trouve les problèmes relatifs à la perspective d'une *croix*, à la perspective d'une *porte* avec perron, à celle d'un corps de révolution : ce Chapitre se termine par quelques problèmes sur la *perspective cavalière*. L'auteur établit la distinction entre la *perspective linéaire* et la *perspective cavalière*, dont la première est la projection conique d'une figure sur un plan, et la seconde en est la projection cylindrique.

Après avoir parcouru les diverses parties de cet intéressant Ouvrage, nous avons distingué une Note complémentaire relative à la deuxième Partie, que l'auteur a sans doute voulu reléguer à la fin, parce qu'elle exigeait de la part du lecteur une certaine habitude acquise. Cette Note renferme les solutions de six problèmes ayant pour but la recherche du point de contact d'un plan tangent à une surface de révolution, et celle de la courbe de contact d'une surface de révolution soit avec le cylindre, soit avec le cône circonscrit.

Enfin l'Ouvrage se termine par des problèmes de récapitulation, recueil habilement fait de problèmes proposés pour le baccalauréat ès sciences, pour le diplôme de l'enseignement spécial, et de ceux donnés dans les examens pour l'École de Saint-Cyr et pour l'École Centrale.

Nous ne saurions trop recommander la lecture de ce Livre aux jeunes gens qui doivent subir des examens sur la Géométrie descriptive, et aux professeurs chargés de l'enseigner.

J.-P.-A. Bergeron,
docteur ès sciences.

Du volume des segments de l'ellipsoïde et des hyperboloïdes, en fonction de la hauteur et de la section équidistante de deux bases parallèles.

C'est sous ce titre que M. Gerono a reçu une Communication du frère Gabriel-Marie, de l'institut des écoles chrétiennes et directeur du pensionnat Notre-Dame de France, au Puy.

Dans cette Communication, que son étendue ne permet pas de reproduire, l'auteur emploie la *méthode des sommations* dont il s'est déjà servi dans son remarquable *Traité de Géométrie élémentaire*.

Il évalue d'abord le volume de la *sphère* et celui du *segment sphérique* dont il trouve l'expression $V = \varpi S^2 h - \frac{\varpi h^4}{12}$, où S est la section équidistante des deux bases et h la hauteur du segment. M. Desboves est arrivé par un autre moyen à cette formule, dans son *Recueil d'exercices de Géométrie*.

Le frère Gabriel-Marie déduit facilement de cette expression celle donnée dans la plupart des Traités de Géométrie.

Des considérations ingénieuses conduisent l'auteur à l'objet principal de cette Communication; il arrive à l'expression des segments faits par des plans parallèles et perpendiculaires à l'axe dans les *solides de révolution* engendrés par $y^2 = 2px + qx^2$ et il obtient pour les segments :

De l'*ellipsoïde*.... $V = \varpi h\left(S^2 - \frac{qh^2}{12}\right)$,

Du *paraboloïde*... $V = \varpi h S^2$,

De l'*hyperboloïde*. $V = \varpi h\left(S^2 + \frac{qh^2}{12}\right)$.

L'auteur fait remarquer que le tronc du *paraboloïde* est moyen arithmétique entre les troncs correspondants de l'*ellipsoïde* et de l'*hyperboloïde*, et que celui de l'*hyperboloïde équilatère* résulte du segment de l'hyperboloïde en y faisant $q = 1$.

Le frère Gabriel-Marie emploie le même procédé pour la recherche du volume engendré par la rotation autour de l'axe

non transverse de l'hyperbole et du petit axe de l'ellipse; il passe ensuite à la détermination de *l'onglet du paraboloïde hyperbolique*, volume compris entre la surface, le plan tangent au sommet commun et un plan parallèle à une des paraboles, et il est conduit à une formule dont il peut donner plusieurs expressions.

L'auteur remarque que tout volume dont la section est une fonction algébrique entière de l'abscisse peut s'exprimer avec facilité et il donne pour exemple la *lemniscate*.

Enfin la Communication se termine par une remarque où l'on voit que, en s'appuyant sur les propriétés des diamètres conjugués, la méthode peut s'appliquer au cas d'un tronc quelconque à bases parallèles.

Le frère Gabriel-Marie se propose de publier son intéressant travail dans le recueil d'exercices annoncé à la suite de l'appendice de la deuxième édition de la Géométrie mentionnée avec éloges dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (mai 1876).

J.-P.-A. Bergeron.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. I sei Cartelli di Matematica disfida, primamente intorno alla generale risoluzione delle equazioni cubiche, di *Lodovico Ferrari*, coi sei contro-cartelli in risposta di *Nicolò Tartaglia*, comprendenti le soluzioni de' quesiti dall'una et dall'altra parte proposti.

Raccolti, autografati e pubblicati da *Enrico Giordani*, Bolognese. Premesse notizie bibliografiche ed illustrazioni sui Cartelli medesimi, estratte da documenti già a stampa ed altri manoscritti favoriti dal Comm. Prof. *Silvestro Gherardi*, Preside dell'Istit. tecn. prov. di Firenze.

Milano, 1876, R. Stabilimento litografico di Luigi Ronchi, e tipografia degl' ingegneri.

Peu d'années avant 1858, la collection complète des *Cartelli* de *Ferrari* était possédée par M. Gherardi, actuellement président de l'Institut technique provincial de Florence. En 1858, des circonstances qu'on ne peut trop regretter ont fait passer cette précieuse collection des mains de M. Gherardi dans celles de *Libri;* et aujourd'hui on ne sait plus quel en est le possesseur, ni dans quelle bibliothèque il serait possible de la trouver.

Les recherches de M. *Enrico Giordani,* auteur du livre que nous annonçons, lui ont fait découvrir les six *Cartelli,* relatifs à la résolution des équations cubiques, et dont les exemplaires originaux sont devenus extrêmement rares. M. Giordani a réuni en un volume ces six *Cartelli,* en y ajoutant de très-intéressants documents historiques, et il a dédié son ouvrage à M. le prince Boncompagni, au savant qui s'occupe avec tant de zèle, et si libéralement, de l'histoire des sciences, de l'histoire intellectuelle des temps passés.

La présente édition du livre de M. Giordani se compose seulement de 212 exemplaires numérotés et qui portent la signature de l'auteur. (G).

2. Cours de mécanique analytique, par M. *Ph. Gilbert,* Dr ès sciences physiques et mathématiques; professeur à la Faculté des Sciences de l'Université catholique de Louvain, Membre correspondant de l'Académie pontificale de' *Nuovi Lincei,* et de la Société philomathique de Paris. (Partie élémentaire.)

   Louvain, Ch. Peeters, libraire-éditeur.
   Paris, Gauthier-Villars, libraire; 1877.

3. Interpolation and adjustement of series; by E. *L. de Forest.* New-Haven, Tuttle, Morehouse and Taylor, printers; 1876.

4. Théorie analytique des lignes a double courbure, par *Eugène Catalan,* professeur à l'Université de

Liége, Associé de l'Académie de Belgique, Membre de la Société des Sciences de Liége, etc.

Bruxelles, F. Hayez, imprimeur de l'Académie royale; 1877.

5. NOTE SUR LE PLANIMÈTRE POLAIRE DE M. AMSLER, par M. C.-A. Laisant, capitaine du Génie, ancien élève de l'École Polytechnique.

Bordeaux, imprimerie G. Gounouilhou, 11, rue Guiraude; 1876.

6. THÉORÈMES SUR LES NOMBRES PREMIERS. — THÉORÈMES SUR LES NOMBRES. — SUR UN PROBLÈME D'ARITHMÉTIQUE. par C.-A. Laisant, capitaine du Génie, ancien élève de l'École Polytechnique.

Bordeaux, imprimerie G. Gounouilhou, 11, rue Guiraude; 1876.

7. BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE, pubblicato da B. Boncompagni, Socio ordinario dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei. Socio corrispondente dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. Delle R. Accademie delle Scienze di Torino, e di Scienze, Lettere ed Arti di Modena. Socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Berlino.

T. IX.

GENNAIO 1876. —Intorno alla vita ed ai lavori di Francesco Maurolico. — *Federico Napoli.*

Scritti inediti di *Francesco Maurolico.*

FEBRAIO 1876. — Scritti inediti di *Francesco Maurolico* (Fine).

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Marzo 1876. — Sur un théorème de l'Arithmétique indienne; par M. *Edouard Lucas.*

Die Römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst eine historisch-mathematische Untersuchung von Dr *Moritz Cantor.* Mit 5 lithographirten Tafeln. Leipzig, Druck und Verlag von *B.-G. Teubner;* 1875. — *A. Favaro.*

Die Rechenkunst im sechzehnten Jahrhundert von A. Kuckuck. Separatabdruck aus der Festschrift zur dritten Säcularfeier des Berlinischen Gymnasiums zum grauen Kloster. Berlin, Weidmannsche Buchhandlung; 1874. — Dr *Maurizio Cantor.*

Intorno a un trattato d'Aritmetica di *Giovanni Widmann* di *Eger.* — *B. Boncompagni.*

Aprile 1876. — Intorno al problema delle tautocrone, Lettera del Prof. *F. Brioschi* a *B. Boncompagni.*

Note sur *Jean-André de Segner*, fondateur de la Météorologie mathématique, par le Dr *Sigismond Günther.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Maggio 1876. — Prospetto storico dello sviluppo della Geometria moderna. Scritto postumo del Dr *Ermanno Hankel.* Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna.*

Commemorazione di Ermanno Hankel; per *Guglielmo* von *Zahn.* Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna.*

Catalogo dei lavori del Dr *Ermanno Hankel.*

Giugno 1876. — Notice sur la vie et les travaux de *Louis-Othon Hesse,* par M. *Felix Klein;* traduite de l'allemand par M. *Paul Mansion.*

Copernico in Italia. Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna.*

Copernico in Bologna. — Dr *F. Hipler.* Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

Luglio 1876. — Intorno alla vita ed agli scritti di *Gian-Francesco Malfatti,* matematico del secolo XVIII. — *G.-B. Badego.*

Catalogo dei lavori di Gian-Francesco Malfatti.

Catalogo di lavori relativi al problema del Malfatti.

Lettere inedite di Gian-Francesco Malfatti.

AGOSTO 1876. — Lettere inedite di Gian-Francesco Malfatti. (Fine).

Annunzi di recenti pubblicazioni.

SETTEMBRE 1876. — Goffredo Friedlein. Necrologia del Dr *Maurizio Cantor.* Traduzione dal tedesco del Dr *Alfonso Sparagna.*

Catalogo dei lavori del Dr Goffredo Friedlein. — *B. Boncompagni.*

Notice sur la vie et les travaux de Victor-Amédée Le Besgue, par MM. J.-J.-B. Abria et J. Houël.

Catalogue des travaux de V.-A. Le Besgue.

Notice sur les principaux travaux de V.-A. Le Besgue, rédigée par lui-même.

Notes sur les opuscules de Léonard de Pise; par V.-A. Le Besgue.

OTTOBRE 1876. — Prophatii Montepessulani (A. 1300). Præmium in Almanach adhuc ineditum e versionibus duabus antiquis (altera quoque interpolata), una cum textu hebraico e manuscriptis primum edidit, suamque versionem latinam verbalem adjecit *Mauritius Steinschneider.*

Annunzi di recenti pubblicazioni.

TIRAGES A PART.

Scritti inediti di *Francesco Maurolico* (janvier et février 1876).

Commemorazione di *Ermanno Hankel* (mai 1876).

Prospetto storico dello sviluppo della Geometria moderna, scritto postumo del Dr Ermanno Hankel (mai 1876).

Notice sur la vie et les travaux de Louis-Othon Hesse, par M. Félix Klein (juin 1876).

Goffredo Friedlein, necrologia del Dr Maurizio Cantor, traduzione dal tedesco del Dr Alfonso Sparagna, seguita da un catalogo dei lavori del medesimo *G. Friedlein,* compilato da B. Buoncompagni (septembre 1876).

Notice sur la vie et les travaux de *Victor-Amédée Le Besgue,* par M. O. Abria, doyen de la Faculté des Sciences de Bordeaux, et J. Houël, professeur à la même Faculté, suivie de deux travaux inédits de V.-A. Le Besgue (septembre 1876).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 18

(voir 1re série, t. I, p. 123);

PAR M. H. BROCARD.

On donne cinq points d'une courbe du second degré et une droite située sur le plan des cinq points. Déterminer les points de rencontre de la courbe et de la droite.

La solution de cette question se rattache à une propriété des coniques, dont nous allons rappeler brièvement la démonstration.

THÉORÈME. — *Si l'on coupe une conique par deux systèmes de sécantes parallèles* OA, OC; O' A', O' C', *on a, entre les segments déterminés snr les sécantes, la relation*

$$\frac{OA.OB}{OC.OD} = \frac{O'A'.O'B'}{O'C'.O'D'}$$

Prenons pour axes de coordonnées les deux sécantes OA, OC. L'équation de la conique sera

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0;$$

faisant successivement x et y nuls, on a

$$OA.OB = \frac{F}{C}, \quad OC.OD = \frac{F}{A};$$

donc

$$\frac{OA.OB}{OC.OD} = \frac{A}{C}.$$

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes, A et C restent invariables ; le rapport en question est donc constant. C'est ce qu'il fallait démontrer.

Cette propriété établie, soient a, b, c, d, e les cinq points donnés et xy la droite donnée.

Joignons c, d par la droite cd, qui coupe xy en o ; et, par les points a, b, menons des parallèles af, bg à xy, jusqu'à leurs rencontres en o', o'' avec la droite $cdo'o$. Nous aurons

$$ox.oy = \frac{o'a.o'f}{o'd.o'c} \cdot od.oc \text{ (*)}.$$

D'ailleurs, les droites af et bg passant, respectivement, par les points a, b de la conique, on peut, par la construction précédente, obtenir les points f et g (**) ; et, par suite, joindre les milieux de af et de bg, ce qui donne une droite qui coupe xy en son milieu ω. Alors on a

$$ox + oy = 2.o\omega.$$

On est donc ramené à construire un rectangle dont on connaît la surface et la somme (ou la différence) des côtés.

(*) f et g représentent les points où les parallèles af, bg coupent la courbe.

(**) Les points f et g ne peuvent être obtenus au moyen de cette construction qui est indépendante de la position du cinquième, des points donnés e. Mais la construction dont il s'agit ramène la question proposée à celle-ci qui en est un cas particulier : *On donne sur un même plan cinq points a, b, c, d, e d'une conique et une droite af qui passe par l'un de ces points a, déterminer le second point d'intersection f de la courbe et de la droite.* La solution de cette dernière question n'offre aucune difficulté, puisque l'égalité des rapports *anharmoniques* des deux faisceaux ($a.bcdf$) et ($e.bcdf$) fait immédiatement connaître la direction du rayon ef. (G.)

QUESTIONS.

1221. *Théorème.* — Étant donnés un tétraèdre quelconque ABCD et un point O, on peut faire passer par ce point trois droites qui rencontrent respectivement les arêtes

AD, BC, en des points a, a';
BD, CA, » b, b';
CD, AB, » c, c'.

Si l'on construit sur ces arêtes les points conjugués harmoniques

α, α',
β, β',
γ, γ',

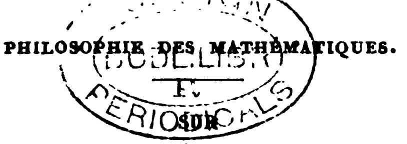
les six points b, c, b', c', α, α' seront dans un plan; et il en sera de même des six points c, a, c', a', β, β', et de a, b, a', b', γ, γ'.

(Communiqué par M. H. Schröter, professeur à l'Université de Breslau).

1222. On donne sur un plan un point A, et un cercle de rayon variable, mais dont le centre est fixe; on mène à ce cercle deux tangentes AM_1, AM_2, et la corde des contacts M_1M_2. A quelles valeurs du rayon variable, correspond le maximum : 1° du périmètre du triangle AM_1M_2; 2° de l'aire de ce triangle; 3° de la corde des contacts? (Harkema).

1223. Étant données deux hyperboles équilatères, trois de leurs points d'intersection et les deux points symétriques du quatrième par rapport aux centres des deux hyperboles sont situés sur un même cercle.

(Pellet).



PHILOSOPHIE DES MATHÉMATIQUES.

SUR

UN NOUVEL EXEMPLE DE LA RÉDUCTION DES DÉMONSTRATIONS A LEUR FORME LA PLUS SIMPLE ET LA PLUS DIRECTE;

PAR M. L. LALANNE,
Inspecteur général des Ponts et Chaussées.

Dans la séance de l'Académie des Sciences en date du 26 juin 1876, M. Yvon Villarceau, comparant la complication des procédés en usage pour effectuer les développements de $\cos mx$ et de $\sin mx$ avec la simplicité des lois de ces développements, en concluait que, « d'après une remarque de Lamé, il devait exister un mode d'opérer dont le degré de simplicité fût conforme à celui du résultat » (*Comptes rendus*, t. LXXXII, p. 1469); et il donnait, en effet, une méthode aussi simple que nouvelle pour obtenir les développements dont il s'agit.

M. de Saint-Venant, relevant cette remarque de son savant confrère, a rappelé qu'il avait, le 5 mai 1849, exprimé la même chose dans une Communication faite à la Société philomathique (*l'Institut*, n° 803). « Tout théorème, disait-il, est susceptible d'une infinité de démonstrations; mais il n'a qu'une *raison*, qu'un *pourquoi*, renfermé en germe dans les définitions et les principes de la Science. Cette raison logique étant une fois trouvée, son expression offrira, en général, la forme de démonstration la plus directe, la plus naturelle, la plus simple et la plus facile à comprendre et à retenir (*)... »

(*) Cette remarque a été faite par Lamé dans la première édition de

C'est ainsi que la vraie raison du rapport constant qui existe entre l'aire d'une figure tracée sur un plan et l'aire de sa projection sur un autre plan se manifeste dans sa division, non pas en triangles comme on fait quelquefois, mais en trapèzes dont les bases sont perpendiculaires à l'intersection des deux plans. C'est ainsi qu'une foule de théorèmes et de formules de Géométrie, de Trigonométrie, de Mécanique, démontrées naguère par des circuits de raisonnements et de calculs, sont reconnus aujourd'hui n'être que la conséquence immédiate de cette simple et évidente vérité, que *la projection sur une droite d'un côté d'un polygone fermé est égale à la somme algébrique des projections des autres côtés* et qu'il existe une relation analogue pour les projections de plusieurs aires sur un même plan » (*).

M. de Saint-Venant, dans la Communication qu'il a faite à l'Académie à ce sujet, donne des exemples à l'appui de cette thèse que *tout théorème simple est suscep-*

---

ses *Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*, publiée en 1852. A propos d'une marche longue et compliquée que Poisson avait suivie pour parvenir aux équations d'équilibre d'une membrane élastique, il dit : « ... Je ne vois là qu'un exemple de plus des longueurs qu'occasionne l'oubli du principe suivant : lorsqu'on parvient à un résultat simple par des calculs compliqués, il doit exister une manière beaucoup plus directe d'arriver au même résultat; toute simplification qui s'opère, tout facteur qui disparaît dans le cours du calcul primitif est l'indice certain d'une méthode à chercher, où cette simplification serait toute faite, où ce facteur n'apparaîtrait pas. » *Voir* aussi la deuxième édition (Paris, Gauthier-Villars, 1866), p. 110 et 111, où ce passage est intégralement reproduit.

(*) Cette vérité peut s'énoncer encore en disant que la somme algébrique des projections, sur une droite, des côtés d'un polygone fermé est nulle; et la relation analogue qui existe dans l'espace et qu'indique M. de Saint-Venant consiste en ce que la somme algébrique des projections, sur un plan, des faces d'un polyèdre convexe est nulle pareillement.

tible d'être démontré simplement (*Comptes rendus*, t. LXXXIII, p. 102).

M. Chasles adopte au moins implicitement le même ordre d'idées lorsque, faisant ressortir la fécondité de certaines méthodes nouvelles, telles que le *Principe de correspondance,* il rappelle les prévisions qu'Archimède énonçait dans la préface du Traité des spirales, sur le caractère et l'avenir de la Géométrie : « Combien y a-t-il de théorèmes en Géométrie qui, paraissant d'abord inabordables, reçoivent plus tard leur démonstration? » [*Comptes rendus,* t. LXXXIII, p. 758, et *Revue de France,* 30 novembre, t. XX, p. 798; 1876 (*)].

De ce qui précède, on peut donc induire que la recherche de démonstrations simples, pour tous les résultats ou théorèmes simples eux-mêmes, méritera l'attention des géomètres, tant qu'il restera quelques progrès à faire dans cette voie.

Des études entreprises il y a quelques années sur les polyèdres mettent l'auteur de la présente Note à même de produire un exemple frappant en ce genre.

Il s'agit d'un théorème connu de Statique, intimement lié avec le principe de l'égalité de pression dans les fluides et qui consiste en ce qu'*un polyèdre quelconque est en équilibre lorsqu'il n'est soumis qu'à l'action de forces appliquées normalement aux faces, en leurs centres de gravité et respectivement proportionnelles aux superficies de ces faces.*

Le savant Gergonne a fait, de cette question, l'objet d'une étude approfondie dans le tome X des *Annales de Mathématiques pures et appliquées*. Il annonce d'abord que le théorème n'a encore été démontré nulle part, et

(*) Voici le texte grec : Ποῖα τῶν ἐν γεωμετρίᾳ θεωρημάτων οὐκ εὐμέθοδα ἐν ἀρχᾷ φανέντα, χρόνῳ τὴν ἐξεργασίαν λαμβάνοντι.

il cherche à suppléer à cette omission en prenant comme point de départ la proposition que, si à un point quelconque de l'intérieur d'un tétraèdre on applique quatre puissances respectivement perpendiculaires à ces faces et d'une intensité proportionnelle à leur étendue, ces puissances se feront équilibre.

Après une démonstration assez pénible de cette proposition incidente, on n'est guère plus avancé, même en sachant qu'on pourrait l'étendre à un polyèdre ; car la difficulté consiste en ce que, généralement, les perpendiculaires menées aux plans des faces d'un tétraèdre et à plus forte raison d'un polyèdre quelconque, par les centres de gravité des aires de ces faces, ne passent pas par un même point. Il faut donc prendre une autre voie pour parvenir au but.

Pour cela, l'auteur considère en premier lieu le cas d'un tétraèdre à base horizontale isoscèle, où l'arête aboutissant au sommet de la base est verticale. Dans ce solide, les droites menées perpendiculairement aux faces par leurs centres de gravité se coupent en un même point. On le démontre, et, en vertu de la proposition qui sert de point de départ, l'équilibre a lieu. L'auteur passe ensuite successivement au cas d'un tétraèdre dont les trois arêtes au-dessus du plan de la base sont égales, puis d'un tétraèdre quelconque, et enfin d'une pyramide quelconque. Chacun de ces cas se ramène au précédent, et la décomposition en pyramides permet naturellement d'étendre la proposition à un polyèdre quelconque.

Ce n'est donc qu'après une longue et pénible exhaustion, qui ne comporte pas moins de six étapes successives et qui occupe une dizaine de pages dans son recueil, que le savant rédacteur des *Annales* parvenait à démontrer le théorème dont il s'agit. Mais l'appareil et les circuits

d'une pareille analyse sont-ils bien en rapport avec la simplicité de l'énoncé?

Dans son *Traité de Mécanique* (2e Partie; Paris, Hachette; 1873), M. Ed. Collignon, en donnant une démonstration directe de l'équilibre pour le cas d'un tétraèdre quelconque et en passant de ce cas à celui du polyèdre, a supprimé quatre des six étapes de M. Gergonne. Cependant l'équilibre des forces mises en jeu ne ressort de cette démonstration qu'en considérant séparément la résultante des forces et la somme de leurs moments par rapport à trois droites.

Mais on peut arriver au but d'une manière plus directe et beaucoup plus simple par une démonstration qui se rattache à l'emploi des projections et de leurs sommes algébriques particulièrement signalées par M. de Saint-Venant comme permettant de remplacer par des vérités d'ordre intuitif de longs circuits de raisonnements et de calculs. L'auteur espère qu'elle paraîtra ne pas démentir le principe appuyé de l'autorité imposante des géomètres précédemment cités.

Décomposons chacune des forces en trois autres, suivant des directions rectangulaires entre elles; et, pour fixer les idées, supposons que l'une de ces directions soit verticale, les deux autres étant horizontales. Il y aura trois faisceaux de forces, parallèles entre elles, dans chaque faisceau. Chacune des composantes verticales, étant égale au produit de la force normale par le cosinus de l'inclinaison à l'horizon de la face correspondante, est proportionnelle à la projection horizontale de cette face. Si donc on projette tout le système sur le plan horizontal, la somme des projections des faces du polyèdre situées au-dessus du *contour apparent* étant égale à la somme des projections des faces situées au-dessous, la somme des composantes verticales qui agissent de haut

en bas sera aussi égale à la somme des composantes verticales qui agissent de bas en haut. Les points d'application de chacune de ces deux séries de composantes sont, comme on sait, les centres de gravité des projections des faces; les deux résultantes passeront donc par le même point, qui est le centre de gravité du polygone limité par le contour apparent; et comme elles sont égales et qu'elles agissent en sens contraires, elles se détruisent.

Le même raisonnement étant applicable aux deux autres faisceaux, il en résulte que la composition des forces parallèles, dans chacun des trois faisceaux, donne une résultante nulle. Le système est donc en équilibre.

Un polyèdre fermé quelconque pouvant être décomposé en polyèdres convexes, la proposition est générale.

Il est bien entendu que toutes les forces agissent normalement aux faces, soit du dehors en dedans, soit de l'intérieur à l'extérieur, sans quoi la proposition n'aurait pas lieu.

En résumé, la raison essentielle de la réalité de cette proposition est que *la somme des projections des faces d'un polyèdre sur un plan est nulle,* en considérant comme de signes contraires les projections des faces situées, les unes au-dessus, les autres au-dessous du contour apparent; vérité d'ordre purement intuitif. L'expression de cette *raison,* de ce *pourquoi,* comme M. de Saint-Venant l'a appelé, combinée avec le rapport qui lie entre elles une face et sa projection et avec la correspondance des centres de gravité de l'une et de l'autre, n'offre-t-elle pas « la démonstration la plus directe, la plus naturelle, la plus simple, ainsi que la plus facile à comprendre et à retenir, du théorème énoncé »?

On démontrerait de la même manière et plus facile-

ment encore un théorème dû à M. Chasles (*) et qui consiste en ce que *les forces concourantes, normales aux faces d'un polyèdre fermé et proportionnelles aux superficies de ces faces, forment un système en équilibre*. Car les composantes de ces forces parallèlement à une direction quelconque que, pour abréger, nous supposons verticale, passent, sur le plan horizontal, par la projection du point de concours; et leur somme est nulle, puisqu'elles sont respectivement proportionnelles à des projections de faces dont la somme est nulle pareillement.

L'analogie du théorème de Gergonne avec celui de M. Chasles est manifeste. On fait usage de considérations fondées sur les mêmes principes dans le corps de doctrines qui, sous le nom de *Statique graphique*, a pris un développement considérable par les travaux de géomètres étrangers, parmi lesquels nous citerons MM. Culmann, en Suisse (*Die graphische Statik*, Zurich, 1866 et 1875), Cremona, en Italie (*Le figure reciproche nella Statica grafica*, Milan, 1872; *Elementi di calcolo grafico*, Turin, 1874), Rankine, en Angleterre (*Manuel of civil engineering*, Londres, 1865), etc. (**).

(*) *Correspondance mathématique et physique* publiée par M. Quételet. t. VI, p. 92; Bruxelles, 1830. La démonstration que nous en donnons, fondée sur la considération du *contour apparent*, dispense de tout calcul; elle est donc très-différente en la forme, quoique analogue, au fond, à celle de l'illustre géomètre. *Voir* aussi le *Bulletin des Sciences mathématiques* du baron de Férussac, t. XIII, p. 246; Paris, 1830.

(**) Sous cette dénomination de *Statique graphique*, on a compris des procédés entièrement inédits, des constructions déjà connues et des idées qui ont pris naissance en France. Les principaux promoteurs de la science nouvelle se sont plu à remonter aux origines et à rendre à notre pays la part qui lui appartient de très-ancienne date. Les noms de Viète, de Descartes, do Varignon, de Monge, de Poinsot, de Chasles, de

SUR UN PROBLÈME DE MÉCANIQUE RATIONNELLE;

PAR M. PH. GILBERT,
Professeur à l'Université de Louvain.

La solution de la question de Mécanique rationnelle proposée au concours d'Agrégation de 1873, solution publiée dans le numéro de novembre 1874 des *Nouvelles Annales* (2e série, t. XIII, p. 507), n'est pas exacte. Comme je ne crois pas que le fait ait été signalé jusqu'ici, il sera peut-être utile de rectifier ce qu'elle a d'erroné.

L'auteur détermine le centre de gravité G de l'anneau et de la masse fixée à sa circonférence; puis il conclut, sans autre démonstration, que le mouvement du point G est celui d'un point pesant de masse $\mu = M + m$, mobile sur une circonférence tournant autour d'un diamètre vertical avec une vitesse constante ω. Il se borne donc à déterminer ce dernier mouvement.

L'assimilation n'est pas justifiée et conduit, en fait, à un résultat inexact. Il suffit, pour s'en convaincre, de remarquer que le rayon $l = \frac{MR}{M+m}$ de la circonférence, dans le problème simplifié, s'évanouit lorsque la masse

Poncelet, de Méry, de Cousinery et de divers autres géomètres ou ingénieurs figurent honorablement dans l'histoire de la *Statique graphique* et du *Calcul graphique*, qui en est une des branches (*voir*, outre les ouvrages qui viennent d'être cités, l'historique publié à Leipzig, par M. Weyrauch, en 1874, sous le titre *Ueber die graphische Statik*).

Citons aussi *La Statique graphique* de M. Maurice Levy (Paris, Gauthier-Villars, 1874).

additionnelle M devient nulle, et l'intégrale de l'équation (1), savoir

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l}\cos\theta + \omega^2\sin^2\theta + C,$$

donne

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \infty,$$

ce qui est absurde. En traitant directement le problème proposé, nous reconnaîtrons d'ailleurs en quoi pèche la solution.

Soit pris pour axe OZ l'axe vertical BB' dans le sens de la pesanteur, le plan XY passant par le centre O de l'anneau. Prenons un système de comparaison mobile autour de OZ avec la vitesse angulaire ω, et ayant pour axe OX le diamètre horizontal AA' autour duquel l'anneau peut basculer. Soient a le rayon de l'anneau, θ l'angle que fait OC avec l'axe OZ. Appliquons le théorème des forces vives au mouvement relatif de l'anneau et de la masse M par rapport au système de comparaison. La force vive relative de l'anneau, dont le mouvement relatif est une rotation autour de AA', a pour expression $\frac{ma^2}{2}\frac{d\theta^2}{dt^2}$; celle de la masse M, $\mathrm{M}a^2\frac{d\theta^2}{dt^2}$. On a donc

$$\sum m v_r^2 = \left(\mathrm{M} + \frac{m}{2}\right)a^2\frac{d\theta^2}{dt^2}.$$

Le travail des forces centrifuges composées étant nul, il suffit d'ajouter au travail des forces motrices celui des forces centrifuges de tous les points, dues à la rotation du système de comparaison autour de OZ. Or le poids de l'anneau est détruit par la fixité du point O; le travail élémentaire du poids M est exprimé par

$$\mathrm{M}g\,d.a\cos\theta = \mathrm{M}ga\,d\cos\theta.$$

D'autre part, on trouve par un calcul facile, en dési-

gnant par r la distance d'un élément dm de l'anneau à l'axe vertical, par ζ l'angle que fait avec OX le rayon mené du point O à cet élément, que la force centrifuge de l'élément dm est $\omega^2 r dm$; que l'arc élémentaire qu'il décrit pendant le temps dt est $a \sin\zeta d\theta$, et le cosinus de l'angle compris entre la direction de la force et celle de la vitesse relative $\frac{a \sin\zeta \sin\theta \cos\theta}{r}$; le travail élémentaire relatif de la force centrifuge de l'élément dm est donc égal à

$$\omega^2 \sin\theta \cos\theta d\theta \times a^2 \sin^2\zeta dm,$$

et la somme de ces travaux pour l'anneau entier a pour expression

$$\frac{ma^2}{2} \omega^2 \sin\theta \cos\theta d\theta.$$

De même, la force centrifuge de la masse M développe un travail élémentaire relatif égal à $M a^2 \omega^2 \sin\theta \cos\theta d\theta$, que l'on doit ajouter au précédent. L'équation des forces vives donnera donc

$$\left(M + \frac{m}{2}\right) a^2 \frac{d\theta^2}{dt^2} = 2 M g a \cos\theta + \left(M + \frac{m}{2}\right) a^2 \omega^2 \sin^2\theta + \text{const.},$$

ou, si l'on divise par $\left(M + \frac{m}{2}\right) a^2$, et si l'on pose $l = \frac{2M + m}{2M} a$,

$$(\alpha) \qquad \frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l} \cos\theta + \omega^2 \sin^2\theta + C.$$

Cette équation coïncide avec l'intégrale de l'équation (1) de l'article cité, et la suite de la discussion peut se faire d'une manière toute semblable; la différence entre les deux solutions consiste dans la signification de la constante l qui, pour nous, est égale à $\frac{(2M + m)}{2M} a$ et non à

$\frac{Ma}{M+m}$, et se réduit, pour $M=0$, à l'infini et non à zéro. Il suit de là que, si la masse additionnelle M manque, l'équation du mouvement de l'anneau se réduit à

$$\frac{d\theta^2}{dt^2}=\omega^2\sin^2\theta+C,$$

ce qui est conforme à la réalité. Les deux positions d'équilibre correspondent dans ce cas à $\theta=0$, $\theta=\frac{\pi}{2}$.

Je remarquerai d'ailleurs que la solution du problème proposé peut aussi se déduire, par les simplifications convenables, des équations générales du mouvement relatif d'un corps solide fixé par un point O, par rapport à un système d'axes OXYZ dont le mouvement est connu, équations que je donnerai dans mon *Cours de Mécanique*. L'équation des moments autour de l'axe OX est, en général, celle-ci :

$$\begin{aligned}
&\frac{d.H_x(p+p_1)}{dt}-\left(\frac{dq_1}{dt}-p_1r_1\right)\Sigma mxy-\left(\frac{dr_1}{dt}+p_1q_1\right)\Sigma mxz\\
&+(r_1^2-q_1^2-2qq_1+2rr_1)\Sigma myz-H_x(qr_1+rq_1)\\
&+(H_z-H_y)(qr_1+rq_1+q_1r_1)\\
&-2M(V_x-qz_1+ry_1)(q_1y_1+r_1z_1)\\
&-\frac{d}{dt}(q\Sigma mxy+r\Sigma mxz)\\
&+M\frac{dt}{d}[y_1V_z-z_1V_y+qx_1y_1+rx_1z_1-p(y_1^2+z_1^2)]=G_x.
\end{aligned}$$

H_x, H_y, H_z sont les moments d'inertie du solide par rapport aux axes mobiles OX, OY, OZ, à l'époque t; p_1, q_1, r_1 les composantes de la rotation instantanée du système de comparaison suivant ces mêmes axes, et p, q, r celles de la rotation relative du solide; M la masse du corps; x_1, y_1, z_1 les coordonnées relatives de son centre

de gravité, et V_x, V_y, V_z les composantes de la vitesse relative de ce centre; G_x la projection sur l'axe OX de l'axe du couple résultant des forces extérieures. Appliquant cette équation au problème actuel, on voit sans peine que l'on aura

$$H_x = \left(M + \frac{m}{2}\right)a^2, \quad x_1 = 0, \quad y_1 = \frac{Ma\sin\theta}{M+m},$$
$$z_1 = -\frac{Ma\cos\theta}{M+m}, \quad \Sigma myz = -\left(M + \frac{m}{2}\right)a^2\sin\theta\cos\theta,$$
$$p_1 = 0, \quad q_1 = 0, \quad r_1 = \omega,$$
$$p = \frac{d\theta}{dt}, \quad q = 0, \quad r = 0, \quad G_x = -Mga\sin\theta,$$
$$V_x = 0, \quad V_y = \frac{Ma\cos\theta}{M+m}\frac{d\theta}{dt}, \quad V_z = \frac{Ma\sin\theta}{M+m}\frac{d\theta}{dt}.$$

Substituons ces valeurs dans l'équation générale; nous trouverons, réductions faites,

$$\left(M + \frac{m}{2}\right)a^2\frac{d^2\theta}{dt^2} - \left(M + \frac{m}{2}\right)a^2\omega^2\sin\theta\cos\theta = -Mga\sin\theta.$$

L'intégration de cette équation nous ramène à l'équation (α).

Pour finir, j'observe qu'il serait intéressant d'examiner ce que devient la question lorsque le système, au lieu d'avoir un mouvement angulaire déterminé et constant autour de la verticale BB', peut tourner librement autour de cet axe avec une vitesse variable dépendant des conditions initiales et de la rotation autour de la charnière.

SUR LES THÉORÈMES DE BINET ET DE STAUDT

CONCERNANT LES NOMBRES DE BERNOULLI;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

---

1. MM. Clausen et Staudt ont découvert, en même temps, sur les nombres de Bernoulli, un théorème fort remarquable dont la démonstration a été donnée par ce dernier, dans le *Journal de Crelle* (t. 21, p. 372). En conservant les notations que nous avons adoptées précédemment (*Nouvelles Annales*, même tome, p. 21), ce théorème s'énonce ainsi : *Le coefficient* B_n *de Bernoulli a pour expression*

$$(1)\qquad B_n = A_n - \frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} - \ldots - \frac{1}{\lambda},$$

$2, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ *désignant des nombres premiers tels que* $\alpha - 1, \beta - 1, \gamma - 1, \ldots, \lambda - 1$ *soient des diviseurs de* n, *et* A_n *un nombre entier*. On a, pour les nombres A_n, les valeurs suivantes :

$$A_0 = A_2 = A_4 = \ldots = A_{12} = 1,$$
$$A_1 = A_3 = A_5 = \ldots = A_{2n+1} = 0,$$

$A_{14} = 2$, $\quad A_{16} = -6$, $\quad A_{18} = 56$,
$A_{20} = -528$, $\quad A_{22} = 6193$, $\quad A_{24} = -86576$,
$A_{26} = 1425518$, $\quad A_{28} = -27298230$, $\quad A_{30} = 601580875$,
..........., ..., ...

2. On déduit immédiatement du *théorème de Staudt* que l'expression $a(a^n - 1)B_n$ est toujours un nombre

entier, quel que soit l'entier a. En effet, le binôme $a^n - 1$ est divisible par $a^{\alpha-1} - 1$, lorsque $\alpha - 1$ désigne un diviseur de n, et le produit $a(a^{\alpha-1} - 1)$ est divisible par α, si α est un nombre premier, d'après le théorème de Fermat. Pour $a = 2$, on retrouve un résultat indiqué par M. Genocchi, qui en a déduit des conséquences importantes relatives au fameux problème de Fermat sur l'impossibilité en nombres entiers de l'équation indéterminée

$$x^p + y^p = z^p \quad (*).$$

3. M. Hermite a indiqué une méthode de calcul des nombres entiers A_n, dont nous allons simplifier la démonstration en lui laissant une forme générale (**). Cette méthode conduit à la connaissance d'un grand nombre de fonctions numériques, venant se joindre à toutes celles dont la théorie des fonctions elliptiques a donné l'origine et les propriétés. Soit $f(x)$ une fonction quelconque de degré $2n$, telle que chacune des puissances de x ait un coefficient égal au produit du coefficient binomial correspondant par un nombre entier, et posons

$$(2) \qquad \varphi_r(x) = \frac{1}{1.2.3\ldots r}[f^{(r)}(x+1) - f^{(r)}x].$$

L'application du développement de Taylor et de la formule symbolique [*voir* p. 23, formule (18)]

$$(3) \qquad f(x + B + 1) - f(x + B) = f'(x)$$

nous donne

$$(4) \quad f'(x) = B_0\varphi_0 + B_1\varphi_1 + B_2\varphi_2 + B_4\varphi_4 + \ldots + B_{2n}\varphi_{2n}.$$

(*) A. Genocchi, *Sur les nombres de Bernoulli* (*Annales de Tortolini*; 1852).

(**) *Journal de Crelle*, t. 81. — Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Borchardt; 1875.

En remplaçant les valeurs des coefficients B, d'après (1), on a, après avoir posé (p désigne un nombre premier)

$$(5) \begin{cases} \Sigma_1(x) = A_0\varphi_0 + A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + \ldots + A_{2n}\varphi_{2n} - f'(x), \\ p\Sigma_p(x) = \varphi_{p-1} + \varphi_{2p-2} + \varphi_{3p-3} + \varphi_{4p-4} + \ldots, \end{cases}$$

la formule suivante pour le calcul des nombres A :

$$(6)\ \Sigma_1(x) = \Sigma_2(x) + \Sigma_3(x) + \Sigma_5(x) + \Sigma_7(x) + \Sigma_{11}(x) + \ldots,$$

où les Σ se rapportent à tous les nombres premiers jusqu'à $2n+1$. D'ailleurs, $\Sigma_p(x)$ est entier pour toutes les valeurs entières de x, puisque, si la somme des fractions

$$\frac{a_0}{2} + \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} + \frac{c}{\gamma} + \ldots + \frac{l}{\lambda}$$

désigne un nombre entier, chacune des fractions qui composent cette somme est toujours un nombre entier, lorsque tous les dénominateurs sont premiers entre eux.

4. La somme des puissances semblables des nombres inférieurs et premiers à un nombre donné a été obtenue par Binet, au moyen du calcul symbolique (*Comptes rendus*, t. XXXIII, p. 920; 1851). Voici une formule plus simple. Les sommes des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des $(x-1)$ premiers nombres, et des $\left(\frac{x}{d}-1\right)$ premiers multiples de d, en désignant par d un diviseur quelconque de x, ont respectivement pour expressions

$$\frac{(x+B)^{n+1} - B^{n+1}}{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{(x+dB)^{n+1} - (dB)^{n+1}}{d(n+1)}.$$

On a donc, par un procédé analogue à celui qui conduit à l'évaluation du nombre des entiers inférieurs et premiers au nombre

$$x = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

la formule symbolique suivante, dans laquelle Σ_n désigne

la somme des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des entiers inférieurs et premiers à x,

$$(7)\qquad (n+1)\Sigma_n = (x+Q)^{n+1} - Q^{n+1};$$

et l'on a

$$(8)\qquad \left\{ \begin{aligned} Q_n &= B_n(1-a^{n-1})(1-b^{n-1})(1-c^{n-1})\ldots, \\ Q_0 &= \left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots. \end{aligned} \right.$$

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,

Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]

---

86. Comme application immédiate de notre théorie, nous donnons les formules fondamentales de la géométrie polyédrique, distance de deux points, surface d'un triangle, volume d'un tétraèdre, angle de deux droites et de deux plans, axes principaux d'une surface du second degré, etc., les figures étant rapportées au système de huit plans, déterminant les tétraèdres de référence *abcd*, *a′b′c′d′*.

Comme on le verra, nos formules, à cause de leur parfaite symétrie, sont simples, malgré le grand nombre de termes qu'elles contiennent.

Nous donnons ensuite la théorie des surfaces homofocales, des rayons de courbure, des lignes géodésiques et de certains systèmes de surfaces. Comme nous n'avons ici en vue que les surfaces du second degré, nous

---

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481, 529, et t. XVI, p. 5.

emploierons simplement le mot *surface* pour les désigner.

Formules fondamentales de la géométrie polyédrique.

87. Considérons la relation

$$X_4 = -36\pi^6 v_4 efgh . e'f'g'h'$$

démontrée au n° 21. On a, pour le développement de X_4,

$$X_4 = \begin{vmatrix} (e, A) & (f, A) & (g, A) & (h, A) \\ (e, B) & (f, B) & (g, B) & (h, B) \\ (e, C) & (f, C) & (g, C) & (h, C) \\ (e, D) & (f, D) & (g, D) & (h, D) \end{vmatrix}$$

$$\times \begin{vmatrix} (e', A') & (f', A') & (g', A') & (h', A') \\ (e', B') & (f', B') & (g', B') & (h', B') \\ (e', C') & (f', C') & (g', C') & (h', C') \\ (e', D') & (f', D') & (g', D') & (h', D') \end{vmatrix}$$

et (8)

$$\pi^6 v_4 = -\frac{(3V)^3}{2ABCD} \cdot \frac{(3V')^3}{2A'B'C'D'}.$$

Dans le cas particulier où les points e', f', g', h' coïncident respectivement avec les sommets a', b', c', d' du tétraèdre $a'b'c'd'$, on voit que cette relation se réduit à

$$(a) \quad \begin{vmatrix} (e, A) & (f, A) & (g, A) & (h, A) \\ (e, B) & (f, B) & (g, B) & (h, B) \\ (e, C) & (f, C) & (g, C) & (h, C) \\ (e, D) & (f, D) & (g, D) & (h, D) \end{vmatrix} = \frac{(3V)^3}{ABCD} \cdot 3efgh;$$

elle donnera le *volume du tétraèdre efgh, connaissant les distances de ses sommets aux faces du tétraèdre abcd*, dont le volume est représenté par V.

Si le point h coïncide avec le sommet d du tétraèdre $abcd$, on a

$$(h, A) = (h, B) = (h, C) = 0 \quad \text{et} \quad (h, D) = (d, D).$$

Comme d'ailleurs $\frac{(3\text{V})^2}{\text{ABCD}} = 2(d, \text{D}) \sin \text{ABC}$, nous trouvons, en désignant par H le plan *efg*,

$$(b) \quad \begin{vmatrix} (e, \text{A}) & (f, \text{A}) & (g, \text{A}) \\ (e, \text{B}) & (f, \text{B}) & (g, \text{B}) \\ (e, \text{C}) & (f, \text{C}) & (g, \text{C}) \end{vmatrix} = 6\,efgd \sin \text{ABC} = 2\,efg \sin \text{ABC}\,(d, \text{H}).$$

Si, dans cette relation, le point g coïncide avec le sommet c du tétraèdre *abcd*, on a

$$(g, \text{A}) = (g, \text{B}) = 0, \quad (g, \text{C}) = (c, \text{C}),$$

de sorte que

$$\begin{vmatrix} (e, \text{A}) & (f, \text{A}) \\ (e, \text{B}) & (f, \text{B}) \end{vmatrix} = \frac{6\,efcd \sin \text{ABC}}{(c, \text{C})};$$

or

$$(c, \text{C}) = cd \sin(\nu, \text{C}), \quad \sin \text{ABC} = \sin \text{AB} \sin(\nu, \text{C}),$$

et comme, d'ailleurs,

$$6\,efcd = ef.cd \mid \varepsilon, \nu \mid,$$

ε représentant la droite *ef*, on aura

$$(c) \quad \begin{vmatrix} (e, \text{A}) & (f, \text{A}) \\ (e, \text{B}) & (f, \text{B}) \end{vmatrix} = ef. \mid \varepsilon, \nu \mid \sin \text{AB},$$

formule que nous avons employée au n° 17.

Désignant par E et F deux plans menés par la droite ε, on a aussi

$$(d) \quad \begin{vmatrix} (c, \text{E}) & (c, \text{F}) \\ (d, \text{E}) & (d, \text{F}) \end{vmatrix} = cd \mid \varepsilon, \nu \mid \sin \text{EF}.$$

Coordonnées d'un plan déterminé par trois de ses points.

88. Lorsqu'un plan H est déterminé par trois points,

e, f, g, au lieu de prendre pour ses coordonnées les distances (a, H), (b, H), (c, H), (d, H) de ce plan aux sommets du tétraèdre *abcd*, on pourra quelquefois employer avec avantage les déterminants

$$\begin{vmatrix} (e,C) & (f,C) & (g,C) \\ (e,B) & (f,B) & (g,B) \\ (e,D) & (f,D) & (g,D) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (e,A) & (f,A) & (g,A) \\ (e,C) & (f,C) & (g,C) \\ (e,D) & (f,D) & (g,D) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} (e,B) & (f,B) & (g,B) \\ (e,A) & (f,A) & (g,A) \\ (e,D) & (f,D) & (g,D) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (e,A) & (f,A) & (g,A) \\ (e,B) & (f,B) & (g,B) \\ (e,C) & (f,C) & (g,C) \end{vmatrix},$$

lesquels, d'après la relation (b), expriment ces mêmes distances multipliées par des facteurs constants.

Coordonnées d'un point déterminé par trois plans.

89. Si l'on désigne par E, F, G trois plans se coupant au point h, au lieu de prendre pour les coordonnées de ce point les distances (h, A), (h, B), (h, C), (h, D) aux faces du tétraèdre *abcd*, on pourra employer les déterminants

$$\begin{vmatrix} (c,E) & (c,F) & (c,G) \\ (b,E) & (b,F) & (b,G) \\ (d,E) & (d,F) & (d,G) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (a,E) & (a,F) & (a,G) \\ (c,E) & (c,F) & (c,G) \\ (d,E) & (d,F) & (d,G) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} (b,E) & (b,F) & (b,G) \\ (a,E) & (a,F) & (a,G) \\ (d,E) & (d,F) & (d,G) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (a,E) & (a,F) & (a,G) \\ (b,E) & (b,F) & (b,G) \\ (c,E) & (c,F) & (c,G) \end{vmatrix},$$

lesquels, d'après la même relation (b), expriment ces mêmes distances multipliées par des facteurs constants.

Coordonnées d'une droite.

90. Lorsqu'une droite ε est déterminée par deux de ses points e et f, on peut prendre pour ses coordonnées relatives au tétraèdre *abcd* les six déterminants

$$\begin{vmatrix} (e, A) & (f, A) \\ (e, B) & (f, B) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (e, A) & (f, A) \\ (e, C) & (f, C) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (e, A) & (f, A) \\ (e, D) & (f, D) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} (e, B) & (f, B) \\ (e, C) & (f, C) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (e, C) & (f, C) \\ (e, D) & (f, D) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (e, D) & (f, D) \\ (e, B) & (f, B) \end{vmatrix}.$$

Nous les désignerons, pour abréger, par Z_{AB}, Z_{AC}, Z_{AD}, Z_{BC}, Z_{CD}, Z_{DB}.

Lorsque la droite ε est déterminée par deux plans E, F menés par cette droite, on peut prendre pour ses coordonnées les six déterminants

$$\begin{vmatrix} (a, E) & (a, F) \\ (b, E) & (b, F) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (a, E) & (a, F) \\ (c, E) & (c, F) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (a, E) & (a, F) \\ (d, E) & (d, F) \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} (b, E) & (b, F) \\ (c, E) & (c, F) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (c, E) & (c, F) \\ (d, E) & (d, F) \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} (d, E) & (d, F) \\ (b, E) & (b, F) \end{vmatrix}.$$

Nous les désignerons, pour abréger, par Z_{ab}, Z_{ac}, Z_{ad}, Z_{bc}, Z_{cd}, Z_{db}.

La relation (c) montre que l'on peut remplacer les coordonnées de la première série par

$$|\varepsilon, \nu|, \quad |\varepsilon, \mu|, \quad |\varepsilon, \alpha|, \quad |\varepsilon, \lambda|, \quad |\varepsilon, \gamma|, \quad |\varepsilon, \beta|.$$

Chaque coordonnée de la droite ε est égale à sa plus courte distance à l'une des arêtes du tétraèdre de référence, multipliée par le sinus de l'angle que cette arête fait avec la droite.

La relation (d) montre que ces mêmes coordonnées

représentent également les termes de la seconde série, mais rangés dans un ordre différent.

Considérons une seconde droite ε' déterminée par deux de ses points e', f' et désignons par Z' ses coordonnées.

Dans le déterminant (a) remplaçons les points g et h par e' et f', nous obtenons

$$Z_{AB}Z'_{CD} + Z_{AC}Z'_{DB} + Z_{AD}Z'_{BC} + Z_{BC}Z'_{AD} + Z_{CD}Z'_{AB} + Z_{DB}Z'_{AC} = \frac{(3V)^2}{ABCD}\, 3efe'f'.$$

Si la droite ε' est déterminée par deux plans E', F', on a

$$Z_{ab}Z'_{cd} + Z_{ac}Z'_{db} + Z_{ad}Z'_{bc} + Z_{bc}Z'_{ad} + Z_{cd}Z'_{ab} + Z_{db}Z'_{ac} = \frac{(3V')^2}{E.F.E'.F'}\, 3abcd,$$

en désignant par V' le volume du tétraèdre formé par les quatre plans E, F, E', F', et par ces mêmes lettres les aires des faces de ce tétraèdre.

De l'une ou l'autre de ces deux formules on peut déduire la suivante, qui, à son tour, les comprend toutes les deux :

$$\frac{|\varepsilon,\nu|\,|\varepsilon',\gamma|}{|\nu,\gamma|} + \frac{|\varepsilon,\mu|\,|\varepsilon',\beta|}{|\mu,\beta|} + \frac{|\varepsilon,\alpha|\,|\varepsilon',\lambda|}{|\alpha,\lambda|} + \frac{|\varepsilon,\lambda|\,|\varepsilon',\alpha|}{|\alpha,\lambda|} + \frac{|\varepsilon,\gamma|\,|\varepsilon',\nu|}{|\nu,\gamma|} + \frac{|\varepsilon,\beta|\,|\varepsilon',\mu|}{|\mu,\beta|} = |\varepsilon,\varepsilon'|.$$

Lorsque les droites ε, ε' coïncident

$$Z_{ab}Z_{cd} + Z_{ac}Z_{db} + Z_{ad}Z_{bc} = 0,$$

$$Z_{AB}Z_{CD} + Z_{AC}Z_{DB} + Z_{AD}Z_{BC} = 0,$$

$$\frac{|\varepsilon,\nu|\,|\varepsilon,\gamma|}{|\nu,\gamma|} + \frac{|\varepsilon,\mu|\,|\varepsilon',\beta|}{|\mu,\beta|} + \frac{|\varepsilon,\alpha|\,|\varepsilon,\lambda|}{|\alpha,\lambda|} = 0.$$

C'est une des relations qui existent nécessairement entre les six coordonnées d'une droite; nous donnons plus loin (100) la seconde relation.

A l'aide des relations (c) et (d), on voit que

$$Z'_{\mathrm{CD}} = \frac{\sin \mathrm{CD}}{ab} \frac{e'f'}{\sin \mathrm{E'F'}} Z'_{ab};$$

mais

$$\frac{\sin \mathrm{CD}}{ab} = \frac{(3\mathrm{V})^2}{\mathrm{ABCD}} \frac{1}{2(a, \mathrm{A})(b, \mathrm{B})},$$

par conséquent

$$Z'_{\mathrm{CD}} = \frac{(3\mathrm{V})^2}{\mathrm{ABCD}} \frac{e'f'}{\sin \mathrm{E'F'}} \frac{Z'_{ab}}{2(a, \mathrm{A})(b, \mathrm{B})},$$

et l'on a des valeurs analogues pour les autres coordonnées.

La première des relations précédentes devient

$$\frac{Z_{\mathrm{AB}} Z'_{ab}}{(a, \mathrm{A})(b, \mathrm{B})} + \frac{Z_{\mathrm{AC}} Z'_{ac}}{(a, \mathrm{A})(c, \mathrm{C})} + \frac{Z_{\mathrm{AD}} Z'_{ad}}{(a, \mathrm{A})(d, \mathrm{D})} + \frac{Z_{\mathrm{BC}} Z'_{bc}}{(b, \mathrm{B})(c, \mathrm{C})} + \frac{Z_{\mathrm{CD}} Z'_{cd}}{(c, \mathrm{C})(d, \mathrm{D})} + \frac{Z_{\mathrm{DB}} Z'_{db}}{(d, \mathrm{D})(b, \mathrm{B})} = ef.\sin \mathrm{E'F'} \,|\, \varepsilon, \varepsilon' \,|.$$

91. Si l'on développe le déterminant (a) par rapport aux éléments de la dernière colonne et que l'on tienne compte de la relation (b), on trouve l'égalité

$$(h, \mathrm{H}) = \frac{(a, \mathrm{H})(h, \mathrm{A})}{(a, \mathrm{A})} + \frac{(b, \mathrm{H})(h, \mathrm{B})}{(b, \mathrm{B})} + \frac{(c, \mathrm{H})(h, \mathrm{C})}{(c, \mathrm{C})} + \frac{(d, \mathrm{H})(h, \mathrm{D})}{(d, \mathrm{D})};$$

elle donne *la distance d'un point h à un plan* H, *lorsque l'on connaît les coordonnées du plan et du point.*

Les distances d'un plan aux sommets de un ou deux tétraèdres sont liées entre elles par des relations que l'on trouvera plus loin (103).

Déterminer les coordonnées du centre de la surface S.

92. Divisons par $(o, E)(o, E')$ les deux membres de la relation (2) du n° 14,

$$I_{EE'} = \sum \frac{(a, E)}{(a, A)} I_{AE'}.$$

Si le plan E passe à l'infini à cause de

$$\frac{I_{EE'}}{(o, E)(o, E')} = \frac{1}{\pi^2} \quad (13),$$

on aura

$$\frac{(o, E')}{\pi^2} = \frac{I_{AE'}}{(a, A)} + \frac{I_{BE'}}{(b, B)} + \frac{I_{CE'}}{(c, C)} + \frac{I_{DE'}}{(d, D)},$$

et de même

$$\frac{(o, E)}{\pi^2} = \frac{I_{EA'}}{(a', A')} + \frac{I_{EB'}}{(b', B')} + \frac{I_{EC'}}{(c', C')} + \frac{I_{ED'}}{(d', D')}.$$

Ces deux relations donnent les distances du centre o de la surface S à des plans quelconques E, E', en prenant pour tétraèdre de référence *abcd* ou *a'b'c'd'*.

Si, dans la première, on prend, pour le plan E', successivement les faces du premier de ces tétraèdres, on a, par exemple,

$$\frac{(o, A)}{\pi^2} = \sum \frac{I_{AA}}{(a, A)}, \quad \frac{(o, B)}{\pi^2} = \sum \frac{I_{AB}}{(o, A)},$$

$$\frac{(o, C)}{\pi^2} = \sum \frac{I_{AC}}{(a, A)}, \quad \frac{(o, D)}{\pi^4} = \sum \frac{I_{AD}}{(a, A)}.$$

Équation du cône circonscrit à la surface S, *ayant pour sommet le point f.*

93. Soit e un point quelconque du cône, ε l'arête ef, on a (2)

$$\overline{ef}^2 \, I_\varepsilon = I_e I_f - I_{ef}^2.$$

Si donc le point f est fixe, $I_e I_f - I_{ef}^2 = 0$ sera l'équation du cône circonscrit en coordonnées de points.

Si, dans le déterminant X_2 (21), on suppose que les points e', f' coïncident avec e, f, et que ce dernier soit fixe,

$$X_2 = 0$$

représente également l'équation par points du cône circonscrit à la surface S, et dont le sommet est au point f.

L'équation du cône asymptote est évidemment

$$I_e + 1 = 0.$$

Équation de la conique déterminée dans la surface S *par le plan* F.

94. Appelons E un plan mené par une tangente quelconque φ de la conique, on a (8)

$$-\frac{1}{\pi^2} \sin^2 \overline{EF} I_\varphi = I_E I_F - I_{EF}^2.$$

Si donc le plan F est fixe, $I_E I_F - I_{EF}^2 = 0$ sera l'équation par plans de la conique d'intersection.

Si, dans le déterminant x_2 (22), on suppose que les plans E', F' coïncident avec E, F et que ce dernier soit fixe,

$$x_2 = 0$$

représente également l'équation par plans de la conique, suivant laquelle le plan F coupe la surface S.

Si le plan F est pris à l'infini, on voit que la section correspondante a pour équation

$$\pi^2 I_E = (o, E)^2.$$

Déterminer les longueurs des axes principaux de la surface S, rapportée à deux tétraèdres de référence.

95. Si l'on divise par $(o, \varepsilon)(o, \varepsilon')$ les deux membres de la relation (18), on a

$$\frac{I_{\varepsilon\varepsilon'}}{(o, \varepsilon)(o, \varepsilon')} = \sum \frac{I_{\gamma\gamma'}}{|\gamma, \nu|\,|\gamma', \nu'|}\,\frac{|\varepsilon, \nu|\,|\varepsilon', \nu'|}{(o, \varepsilon)(o, \varepsilon')}.$$

Lorsque les droites ε, ε' sont dans un même plan diamétral E et qu'elles s'éloignent à l'infini dans ce plan, le premier membre de l'égalité est égal à $-I_E$ (12); d'autre part,

$$\frac{|\varepsilon, \nu|}{(o, \varepsilon)} = \sin(\nu, E), \qquad \frac{|\varepsilon', \nu'|}{(o, \varepsilon')} = \sin(\nu', E),$$

de sorte que

$$-I_E = \sum \frac{I_{\gamma\gamma'}}{|\gamma, \nu|\,|\gamma', \nu'|} \sin(\nu, E)\sin(\nu', E).$$

Soient F, G deux autres plans diamétraux perpendiculaires entre eux et au plan E, ces deux plans donneront une relation analogue à la précédente et, si l'on remarque que $I_E + I_F + I_G = -\frac{S_1^2}{\pi^2}$ (81), nous trouverons, en ajoutant les trois relations obtenues ainsi,

$$(a) \qquad \frac{S_1^2}{\pi^2} = \sum \frac{I_{\gamma\gamma'}}{|\gamma, \nu|\,|\gamma', \nu'|} \cos(\nu, \nu').$$

Divisons par $oe \cdot oe'$ les deux membres de la relation

(15), nous avons

$$\frac{I_{ee'}}{oe.oe'} = \sum \frac{I_{aa'}}{(a, A)(a', A')} \frac{(e, A)(e', A')}{oe.oe'}.$$

Lorsque les points e, e' sont situés sur un même diamètre ε de la surface S, et que ces points s'éloignent à l'infini sur ce diamètre, le premier membre de l'égalité est égal à $-I_\varepsilon$ (11) ; d'autre part,

$$\frac{(e, A)}{oe} = \sin(\varepsilon, A), \quad \frac{(e', A')}{oe'} = \sin(\varepsilon, A'),$$

de sorte que

$$-I_\varepsilon = \sum \frac{I_{aa'}}{(a, A)(a', A')} \sin(\varepsilon, A)\sin(\varepsilon, A').$$

Soient φ et ψ deux autres diamètres perpendiculaires entre eux et au diamètre ε, ces deux diamètres donneront une relation analogue à la précédente et, si l'on remarque que $I_\varepsilon + I_\varphi + I_\psi = -\frac{1}{S^2}$ (82), on trouvera, en ajoutant les trois relations ainsi obtenues,

$$(b) \qquad \frac{1}{S^2} = \sum \frac{I_{aa'}}{(a, A)(a', A')} \cos(A, A'),$$

AA′ désignant l'angle formé par les normales aux plans A, A′, ces normales étant prolongées extérieurement aux faces A et A′.

D'après le n° 2, on a d'ailleurs

$$(c) \qquad \pi^2 = -\frac{36\, abcd.a'b'c'd'}{\Delta_4} = -\frac{36\, VV'}{\Delta_4},$$

de sorte que les trois relations (a), (b), (c) détermineront les carrés des demi-axes principaux de la surface S, et l'on a ce théorème :

Étant donnés une surface du second degré S *et deux*

tétraèdres abcd, a'b'c'd', les carrés X des demi-axes principaux de la surface sont racines de l'équation

$$X^3 \frac{\Delta_4}{36VV'} + X^2 \sum \frac{I_{\gamma\gamma'}}{|\gamma,\nu|\,|\gamma',\nu'|} \cos \nu\nu'$$

$$-X \sum \frac{I_{aa'}}{(a,\ A)(a',\ A')} \cos (A,\ A') + 1 = 0.$$

Corollaires de la relation $I_{ea'} = \sum \frac{(e,\ A)}{(a,\ A)} I_{aa'}$ (14).

96. Si E est le plan polaire du point e' par rapport à la surface S, cette relation devient

$$(e,\ E) = \sum \frac{(e,\ A)}{(a,\ A)} (a,\ E).$$

Imaginons deux sphères ayant pour centres les points q et q' et telles que le plan E soit le plan radical de ces sphères.

Si l'on désigne par P_e, P'_e les puissances d'un point e par rapport à ces sphères, on a

$$\frac{(e, E)}{P_e - P'_e} = \frac{(a, E)}{P_a - P'_a} = \ldots = \frac{1}{2qq'};$$

par conséquent :

Étant données deux sphères q et q', si l'on désigne par P_e, P'_e les puissances d'un point arbitraire e, par rapport à ces sphères, par P_a, P'_a, P_b, P'_b,... les puissances des sommets d'un tétraèdre abcd, par rapport à ces mêmes sphères,

$$P_e - P'_e = \sum \frac{(e, A)}{(a, A)} (P_a - P'_a).$$

Comme cas particulier, nous avons ce théorème :

Un tétraèdre abcd étant inscrit à une sphère, si l'on

désigne par P_e *la puissance d'un point e par rapport à cette sphère et par o un point quelconque,*

$$\overline{oe}^2 - P_e = \sum \frac{(e, A)}{(a, A)} \overline{oa}^2.$$

97. Lorsque la surface S est une sphère, la relation (14) devient, R étant le rayon de cette sphère (23),

$$-1 + \frac{p_{ee'}}{R^2} = \sum \frac{(e, A)}{(a, A)}\left(-1 + \frac{p_{ae'}}{R^2}\right);$$

par conséquent,

$$p_{ee'} = \sum \frac{(e, A)}{(a, A)} p_{ae'}.$$

Un autre tétraèdre $a'b'c'd'$ conduirait de même à la relation

$$p_{ee'} = \sum \frac{(e', A')}{(a', A')} p_{ea'}.$$

Déterminant au moyen de cette dernière les valeurs de $p_{ae'}, p_{be'}, \ldots$, et les substituant dans la première, on a

$$p_{ee'} = \sum \frac{(e, A)(e', A')}{(a, A)(a', A')} p_{aa'} \text{ (16 termes).}$$

Cette égalité serait donnée de suite par la relation (15) appliquée à la sphère. Si le point e' coïncide avec e, on a la relation $\overline{oe}^2 = \sum \frac{(e, A)(e, A')}{(a, A)(a', A')} p_{aa'}$ pour *le carré de la distance des deux points o et e dont l'un est déterminé par ses coordonnées.*

98. Si l'on remplace les puissances par les valeurs

$$2p_{ee'} = \overline{oe}^2 + \overline{oe'}^2 - \overline{ee'}^2,$$

$$2p_{aa'} = \overline{oa}^2 + \overline{oa'}^2 - \overline{aa'}^2,$$

o étant le centre de la sphère,

$$\overline{oe}^2 + \overline{oe'}^2 - \overline{ee'}^2 = \sum \frac{(e, A)(e', A')}{(a, A)(a', A')} \left(\overline{oa}^2 + \overline{oa'}^2 - \overline{aa'}^2\right).$$

Mais

$$\overline{oa}^2 \frac{(e, A)}{(a, A)} \sum \frac{(e', A')}{(a', A')} = \overline{oa}^2 \frac{(e, A)}{(a, A)},$$

$$\overline{oa'}^2 \frac{(e', A')}{(a', A')} \sum \frac{(e, A)}{(a, A)} = \overline{oa'}^2 \frac{(e', A')}{(a', A')};$$

donc

$$(A) \quad \begin{cases} \overline{oe}^2 + \overline{oe'}^2 - \overline{ee'}^2 = \sum oa^2 \dfrac{(e, A)}{(a, A)} \\ \quad + \sum \overline{oa'}^2 \dfrac{(e', A')}{(a', A')} - \sum \dfrac{(e, A)(e', A')}{(a, A)(a', A')} \overline{aa'}^2. \end{cases}$$

Lorsque les deux tétraèdres coïncident, ainsi que les points e, e',

$$\overline{oe}^2 = \sum \overline{oa}^2 \frac{(e, A)}{(a, A)} - \sum \frac{(e. A)(e, B)}{(a, A)(b, B)} \overline{ab}^2.$$

On aurait de même

$$\overline{oe'}^2 = \sum \overline{oa'}^2 \frac{(e', A')}{(a', A')} - \sum \frac{(e', A')(e', B')}{(a', A')(b', B')} \overline{a'b'}^2,$$

de sorte que la relation (A) devient

$$\overline{ee'}^2 = \sum \frac{(e, A)(e', A')}{(a, A)(a', A')} \overline{aa'}^2 - \sum \frac{(e, A)(e, B)}{(a, A)(b, B)} \overline{ab}^2 - \sum \frac{(e', A')(e', B')}{(a', A')(b', B')} \overline{a'b'}^2.$$

Cette relation donne le carré de la distance des deux points e, e', *connaissant les coordonnées de ces points par rapport aux deux tétraèdres* $abcd$, $a'b'c'd'$. Le premier signe Σ contient seize termes, les deux autres chacun six. On trouvera plus loin (101) une autre expression de cette distance.

Lorsque les tétraèdres coïncident, cette formule prend la forme

$$\overline{ee'}^2 = -\sum \frac{[(e, A)-(e', A)][(e, B)-(e', B)]}{(a, A)(b, B)} \overline{ab}^2;$$

il y a six termes analogues.

99. Circonscrivons une sphère au tétraèdre *abcd* et soit P_e la puissance du point *e* par rapport à cette sphère; soit encore $P'_{e'}$ la puissance du point *e'* par rapport à la sphère circonscrite au tétraèdre *a'b'c'd'*. Les points *q*, *q'* seront les centres de ces deux sphères. D'après (96),

$$\overline{oe}^2 - P_e = \sum \frac{(e, A)}{(a, A)} \overline{oa}^2, \quad \overline{oe'}^2 - P'_{e'} = \sum \frac{(e', A')}{(a', A')} \overline{oa'}^2.$$

La relation (A) devient

$$\overline{ee'}^2 - P_e - P'_{e'} = \sum \frac{(e, A)(e', A')}{(a, A)(a', A')} \overline{aa'}^2.$$

Supposons que le point *e* soit le centre de la sphère inscrite au tétraèdre *abcd*, *e'* le centre de la sphère inscrite au tétraèdre *a'b'c'd'*.

$$P_e = \overline{qe}^2 - R^2, \quad P'_{e'} = \overline{q'e'}^2 - R'^2,$$

R et R' étant les rayons des deux sphères circonscrites. On a donc

$$\overline{ee'}^2 - \overline{qe}^2 - \overline{q'e'}^2 + R^2 + R'^2 = rr' \sum \frac{\overline{aa'}^2}{(a, A)(a', A')},$$

r, *r'* étant les rayons des sphères inscrites.

Or, si ε, ε' sont les directions *qe'*, *q'e* et θ l'angle sous lequel se coupent les sphères circonscrites,

$$\overline{ee'} + \overline{qq'}^2 - \overline{qe}^2 - \overline{q'e'}^2 = -2qe' . q'e \cos \varepsilon\varepsilon',$$
$$\overline{qq'}^2 = R^2 + R'^2 + 2RR' \cos \theta,$$

de sorte que

$$\frac{2RR'\cos\theta + 2qe'.q'e\cos\varepsilon\varepsilon'}{r.r'} = -\sum \frac{\overline{aa'}^2}{(a, A)(a', A')}.$$

Lorsque les tétraèdres coïncident, $\cos\theta = -1$,

$$\overline{qe}^2 - R^2 = P_e = -r^2 \sum \frac{\overline{ab}^2}{(a, A)(b, B)}.$$

Cette dernière relation donne l'expression de la puissance du centre de la sphère inscrite à un tétraèdre par rapport à la sphère circonscrite à ce tétraèdre.

Corollaires de la relation $I_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{|\varepsilon, \gamma|}{|\gamma, \nu|} I_{\nu\varepsilon'}$ (17).

100. Si la surface S est une sphère, on a (24)

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = -\frac{\cos\varepsilon\varepsilon'}{R^2} + \frac{(o, \varepsilon)(o, \varepsilon')\cos PP'}{R^4},$$

$$I_{\nu\varepsilon'} = -\frac{\cos\nu\varepsilon'}{R^2} + \frac{(o, \nu)(o, \varepsilon')\cos NP'}{R^4},$$

P, P', N étant les plans diamétraux menés par les droites ε, ε', ν.

Remplaçant dans la relation donnée les indices par ces valeurs, on a une égalité qui étant vraie, quelque soit le rayon R, donne les deux suivantes :

$$\cos\varepsilon\varepsilon' = \sum \frac{|\varepsilon, \gamma|}{|\gamma, \nu|} \cos\nu\varepsilon',$$

$$(o, \varepsilon)(o, \varepsilon')\cos PP' = \sum \frac{|\varepsilon, \gamma|}{|\gamma, \nu|} (o, \nu)(o, \varepsilon')\cos NP'.$$

A l'aide d'un second tétraèdre $a'b'c'd'$, on aurait également

$$\cos\varepsilon\varepsilon' = \sum \frac{|\varepsilon', \gamma'|}{|\gamma', \nu'|} \cos\varepsilon\nu',$$

$$(o, \varepsilon)(o, \varepsilon')\cos PP' = \sum \frac{|\varepsilon', \gamma'|}{|\gamma', \nu'|} (o, \nu')(o, \varepsilon)\cos PN';$$

d'où l'on déduira

$$\cos \varepsilon\varepsilon' = \sum \frac{|\varepsilon, \gamma|}{|\gamma, \nu|} \frac{|\varepsilon', \gamma'|}{|\gamma', \nu'|} \cos \nu\nu' \quad (36 \text{ termes}).$$

$$(o, \varepsilon)(o, \varepsilon') \cos \mathrm{PP}' = \sum \frac{|\varepsilon, \gamma|}{|\gamma, \nu|} \frac{|\varepsilon', \gamma'|}{|\gamma', \nu'|} (o, \nu)(o, \nu') \cos \mathrm{NN}' \quad (36 \text{ termes}).$$

La première de ces relations donne le *cosinus de l'angle de deux droites déterminées par leurs coordonnées.*

101. Remplaçons $|\varepsilon, \gamma|$, $|\varepsilon', \gamma'|$ par les valeurs (c, 87), e, f étant deux points pris sur ε, e', f' deux points pris sur ε',

$$|\varepsilon, \gamma| = \begin{vmatrix} (e, \mathrm{C}) & (f, \mathrm{C}) \\ (e, \mathrm{D}) & (f, \mathrm{D}) \end{vmatrix} \frac{1}{ef \sin \mathrm{CD}},$$

$$|\varepsilon', \gamma'| = \begin{vmatrix} (e', \mathrm{C}') & (f', \mathrm{C}') \\ (e', \mathrm{D}') & (f', \mathrm{D}') \end{vmatrix} \frac{1}{e'f' \sin \mathrm{C'D'}}.$$

Nos deux expressions deviennent, en se rappelant que

$$cd \sin \mathrm{CD}\, |\gamma, \nu| = (c, \mathrm{C})(d, \mathrm{D}),$$

$$c'd' \sin \mathrm{C'D'}\, |\gamma', \nu'| = (c', \mathrm{C}')(d', \mathrm{D}'),$$

$$ef.e'f' \cos \varepsilon\varepsilon' = \sum \begin{vmatrix} (e, \mathrm{C})(f, \mathrm{C}) \\ (e, \mathrm{D})(f, \mathrm{D}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (e', \mathrm{C}')(f', \mathrm{C}') \\ (e', \mathrm{D}')(f', \mathrm{D}') \end{vmatrix} \frac{cd.c'd' \cos \nu\nu'}{(c, \mathrm{C})(d, \mathrm{D})(c', \mathrm{C}')(d', \mathrm{D}')},$$

$$oef.oe'f' \cos \mathrm{PP}' = \sum \begin{vmatrix} (e, \mathrm{C})(f, \mathrm{C}) \\ (e, \mathrm{D})(f, \mathrm{D}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (e', \mathrm{C}')(f', \mathrm{C}') \\ (e', \mathrm{D}')(f', \mathrm{D}') \end{vmatrix} \frac{ocd.oc'd' \cos \mathrm{NN}'}{(c, \mathrm{C})(d, \mathrm{D})(c', \mathrm{C}')(d', \mathrm{D}')}.$$

Lorsque les points e', f' coïncident avec les points e, f,

$$\overline{ef}^2 = \sum \begin{vmatrix} (e, \mathrm{C})(f, \mathrm{C}) \\ (e, \mathrm{D})(f, \mathrm{D}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (e, \mathrm{C}')(f, \mathrm{C}') \\ (e, \mathrm{D}')(f, \mathrm{D}') \end{vmatrix} \frac{cd.c'd' \cos \nu\nu'}{(c, \mathrm{C})(d, \mathrm{D})(c', \mathrm{C}')(d', \mathrm{D}')},$$

$$\overline{oef}^2 = \sum \begin{vmatrix} (e, \mathrm{C})(f, \mathrm{C}) \\ (e, \mathrm{D})(f, \mathrm{D}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (e, \mathrm{C}')(f, \mathrm{C}') \\ (e, \mathrm{D}')(f, \mathrm{D}') \end{vmatrix} \frac{ocd.oc'd' \cos \mathrm{NN}'}{(c, \mathrm{C})(d, \mathrm{D})(c', \mathrm{C}')(d', \mathrm{D}')}.$$

Ces relations donnent le *carré de la distance de deux points e et f et le carré de l'aire d'un triangle.*

(*A suivre.*)

J.-V. PONCELET.

Seconde Partie du Cours de Mécanique appliquée aux machines, publié par M. *X. Kretz*.

Nous nous sommes déjà permis (*) d'appeler la plus sérieuse attention des lecteurs des *Annales* sur la publication des éditions nouvelles des Ouvrages du général Poncelet, relatifs à la Mécanique.

La maison Gauthier-Villars vient de faire paraître la seconde et dernière Partie du célèbre *Cours de Mécanique appliquée aux machines,* professé pendant neuf ans aux élèves de l'École de Metz.

M. X. Kretz, ingénieur en chef des Manufactures de l'État, continue à bien mériter de la Science en donnant tous ses soins à l'achèvement du monument élevé par Mme Poncelet à la mémoire de son illustre mari. Il a scrupuleusement reproduit la dernière rédaction adoptée par Poncelet (1832), en reportant aux *additions* placées à la suite du texte quelques extraits des travaux ultérieurs du général sur certaines questions importantes.

Le volume que nous annonçons est divisé en trois Sections. Les deux premières comprennent en réalité, sous le titre beaucoup trop modeste de *Leçons préparatoires au lever d'usines,* à peu près toute l'Hydraulique. La troisième Section renferme les leçons sur les ponts-levis, que l'Auteur avait publiées par cahiers séparés (1831,

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIII, p. 174.

1835) et rattachées ensuite à l'ensemble du *Cours* dont elles formaient la huitième et dernière partie.

La première Section est consacrée à l'*Étude du mouvement permanent et de l'écoulement des fluides.*

Poncelet y passe en revue, avec la plus grande sagacité et en faisant intervenir avec beaucoup d'habileté le théorème du travail, tout ce qui a rapport à l'hypothèse approximative de D. Bernoulli, à l'écoulement par un orifice en mince paroi, à l'influence des ajutages; au mouvement des fluides (liquides et gaz) dans les tuyaux de conduite, dans les pertuis et coursiers d'usines, dans les canaux à régime constant; enfin, au jaugeage des cours d'eau.

C'est dans les additions qui suivent cette première Section que se trouve la remarquable application faite par Poncelet du principe des forces vives à l'étude des courants à régime variable.

Il est curieux de noter que l'équation différentielle du mouvement varié correspondant fut obtenue presque en même temps et séparément par trois savants ingénieurs dont la Mécanique n'oubliera jamais les noms : Belanger, Poncelet, Navier.

La deuxième Section traite des *Principaux moteurs et récepteurs.*

Nous n'avons jamais pu revoir cette théorie des moteurs hydrauliques sans une véritable admiration pour le génie mécanique du savant professeur. C'est, à notre avis, un modèle de discussion à la fois scientifique et pratique; et l'invention des roues verticales à aubes courbes, exposée par son propre auteur, n'en est certes pas une des parties les moins intéressantes. Nous signalerons, en outre, l'étude si approfondie des roues à augets, l'examen du rendement des divers systèmes de machines à vapeur, et les ingénieux procédés proposés par Poncelet

pour la mesure du travail correspondant à un effort de traction ainsi que pour la recherche expérimentale de la loi des mouvements variés et rapides.

Parmi les additions qui complètent cette deuxième Section, la plus précieuse est sans contredit celle qui se rapporte à la théorie des effets mécaniques de la turbine Fourneyron. Le Mémoire qui renferme cette théorie fut lu par Poncelet dans la séance de l'Académie des Sciences du 30 juillet 1838, et résolut entièrement une question difficile et délicate.

Une Notice historique sur les roues à aubes courbes de Poncelet, due au général Didion, présente aussi un vif intérêt.

La troisième Section, qui traite des *ponts-levis*, comme nous l'avons déjà dit, est une monographie tout à fait classique de ces appareils; elle est terminée par la description et les calculs du pont-levis à contre-poids variables, imaginé par Poncelet lui-même.

On peut juger, par ce trop bref aperçu, que la valeur de ce second volume ne le cède en rien à celle du premier. L'impression en est très-soignée et les figures en sont supérieurement gravées. M. Gauthier-Villars n'a rien épargné, lui aussi, et s'est associé de tout cœur aux soins éclairés de M. Kretz et aux intentions si élevées de Mme Poncelet.

En terminant, nous pouvons aujourd'hui dire au public, avec une joie sincère, que le Cours de Poncelet à la Faculté des Sciences de Paris est en préparation. Il aurait été déplorable que ces leçons fécondes fussent perdues. Nous ne craignons pas d'ajouter qu'elles mettront dans un nouveau jour toute l'originalité d'esprit, toute la puissance de conception de l'infatigable savant. C'est encore M. Kretz qui a bien voulu se charger de diriger cette publication.

Nous serons heureux de voir ainsi, à l'Exposition universelle et internationale de 1878, figurer à l'une des places d'honneur, dans la vitrine de la maison Gauthier-Villars, les œuvres complètes du plus illustre créateur de la Mécanique moderne : nous voudrions qu'on pût les accompagner d'une inscription rappelant que cette précieuse collection est due au dévouement toujours en éveil et au fidèle souvenir de Mme Poncelet.

CH. DE COMBEROUSSE.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE (ANNÉE 1876).

1re SESSION. — GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

(voir 2e série, t. XV, p. 429),

PAR M. JULES FRESON,
Élève à l'École des Mines, à Liége.

On donne deux points O, A, *et l'on considère toutes les paraboles qui ont le point* O *pour sommet et qui passent au point* A. *A chacune de ces paraboles, on mène la tangente et la normale au sommet* O, *et la normale et la tangente au point* A. *On demande :*

1° *Le lieu du point de concours des tangentes au sommet* O *et au point* A ;

2° *Le lieu du point de concours de la normale au sommet* O *et de la tangente en* A ;

3° *Le lieu du point de concours de la tangente au sommet* O *et de la normale en* A ;

4° *Le lieu du point de concours des normales au sommet* O *et au point* A.

1° Soit M le point de concours des tangentes en O

et A à l'une des paraboles considérées. On sait que la parallèle menée par M à l'axe de la parabole passe au milieu C de la corde des contacts OA (*). Donc le lieu du point M est la circonférence décrite sur OC comme diamètre.

2° Si N représente le point de concours d'une normale en O et d'une tangente en A, la perpendiculaire élevée à ON en N rencontre AO prolongée en un point B, tel que OB = OA, car la projection de OA sur l'axe de la parabole est égale à ON. Donc le lieu du point N est la circonférence symétrique par rapport au point O de celle qui a OA pour diamètre.

3° et 4°. Si l'on prend OA pour axe des x, et pour axe des y la perpendiculaire élevée au point O à la droite OA, les coordonnées α, β du point de concours M, des tangentes en A et O satisferont à l'équation

(1) $$\alpha^2 + \beta^2 - \frac{1}{2} d\alpha = 0, \quad \text{où} \quad d = OA.$$

Les équations des tangentes aux points O et A sont

(2) $$y = \frac{\beta}{\alpha} x,$$

et

(3) $$y = \frac{\beta}{\alpha - d}(x - d).$$

Les normales aux mêmes points sont représentées par les équations

(4) $$y = -\frac{\alpha}{\beta} x,$$

et

(5) $$y = \frac{d - \alpha}{\beta}(x - d).$$

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

Combinant successivement les équations (2), (5) et (4), (5) avec la relation (1), on trouve

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x-d}{2d-x}},$$

et

$$y = \pm x \sqrt{\frac{d-x}{x-\frac{1}{2}d}}.$$

On voit que les deux lieux proposés, 3° et 4°, ont un sommet commun en A, un même axe de symétrie OA, et respectivement pour asymptotes les droites représentées par les équations $x = 2d$, $x = \frac{1}{2}d$ (*).

Note. — Solutions entièrement analytiques de MM. Moret-Blanc; Gambey; Brocard; Choquet, maître auxiliaire au lycée de Lille; Agabriel, maître répétiteur au lycée de Châteauroux; Georges Lambiotte, élève à l'École des Mines, à Liége; Talon, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Moulins.

(*) La définition géométrique de ces lieux conduit à un moyen très-simple de les construire par points; car soient D et F les points auxquels une droite quelconque issue du sommet O rencontre la circonférence décrite sur OA comme diamètre, et la tangente en A à cette circonférence; pour obtenir un point, P, du premier des deux lieux géométriques proposés (3° et 4°), il suffira de prendre sur le prolongement de OF la distance FP = FD.

On aura un point P′ du second lieu en prenant le milieu du segment DF. En effet, le triangle rectangle OAF donne

$$AD^2 = \frac{OD}{2} 2DF = MD \times DP:$$

donc l'angle MAP est droit; il s'ensuit que P est le point de concours de la tangente OM au sommet O de la parabole et de la normale AP en A.

On démontrera de même qu'en prenant OM pour normale au sommet O, la normale en A est AP′.

Il est facile d'en conclure, sans aucun calcul, que le lieu du point P est la *podaire* de O, par rapport à une parabole fixe, ayant pour sommet A et pour foyer B;

Et que le lieu du point P′ est la podaire du même point O, par rapport à la parabole dont A est le sommet et C le foyer. (G.)

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (ANNÉE 1876);

PAR M. TERRIER,
Ingénieur civil, à Paris.

Deux droites AB, A'B' *sont perpendiculaires à un même plan* M, *aux points donnés* A *et* A'. *On sait que la longueur de* AB *est double de celle de* A'B'. *Par le pied* A *de* AB *on tire dans le plan* M *une droite* AC, *faisant avec* AA' *un angle donné. Cela posé, on demande de trouver sur la droite* AC *un point d'où l'on verrait les longueurs* AB, A'B' *sous des angles égaux. Discussion sommaire de la solution.*

Par un point quelconque P de la droite AC, pris comme centre, avec $\frac{1}{2}$PA pour rayon, on décrit un arc de cercle qui coupe AA' en Q. Par le point A' on mène à PQ une parallèle qui coupe AC en un point S qui est le point cherché. On a en effet, d'après la construction, $A'S = \frac{1}{2}AS$, et d'après l'énoncé $A'B' = \frac{1}{2}AB$. Les triangles SAB, SA'B', rectangles en A et A', sont donc semblables et par conséquent équiangles, d'où il suit que les longueurs AB, A'B' sont vues du point S sous des angles égaux.

Le problème aura deux solutions, une solution, ou n'admettra aucune solution, suivant que l'arc de cercle décrit du centre P coupera, touchera ou ne rencontrera pas la droite AA', c'est-à-dire suivant qu'on aura l'une ou l'autre des trois conditions

$$\text{angle } A'AC \lesseqgtr 30^\circ \;(*).$$

(*) Pour qu'il n'y ait aucune solution, il faut que l'angle donné A'AC soit compris entre 30 et 150 degrés. Il y a deux solutions quand on a $A'AC > 150^\circ$, et une seule si $A'AC = 150^\circ$.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (ANNÉE 1876);

PAR M. OCTAVE DESGARDINS,
Maître répétiteur au lycée d'Amiens.

Résoudre

$$\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}.$$

Transposant, on a

$$\frac{1}{x-a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{x-b},$$

ou

$$\frac{b-x+a}{b(x-a)}=\frac{x-b-a}{a(x-b)},$$

ou

$$\frac{(b+a)-x}{b(x-a)}=\frac{(b+a)-x}{a(b-x)},$$

équation vérifiée, pour $x=b+a$, le dénominateur étant différent de zéro pour cette valeur de x.

Les numérateurs étant égaux, il y aura encore égalité entre les deux rapports lorsqu'on aura

$$b(x-a)=a(b-x),$$

d'où

$$x=\frac{2ab}{a+b}.$$

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Bourguet. — Voici quelques questions à proposer aux lecteurs des *Nouvelles Annales* :

1° Prouver que

$$L\frac{n+\frac{1}{2}}{m-\frac{1}{2}} > \frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{n} > L\frac{n+1}{m}$$

(L désigne logarithme népérien) $m \geqq 1$.

2° Prouver que la série

$$a^{\frac{1}{m}} + a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}} + a^{\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}} + \ldots$$

est convergente pour $a < \frac{1}{e}$, et divergente pour $a \geqq \frac{1}{e}$.

3° Prouver que la série

$$\frac{m}{n}+\frac{m(m+1)}{n(n+1)}+\frac{m(m+1)(m+2)}{n(n+1)(n+2)}+\ldots$$

est convergente pour $n-m > 1$, et divergente pour $n-m \leqq 1$.

4° Trouver les racines de l'équation

$$0=\frac{1}{2}-\frac{x}{x+1}+\frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} - \frac{x(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\ldots.$$

Extrait d'une lettre de M. Poujade, professeur au Lycée d'Amiens. — Il faut encore ramener votre atten-

tion sur la question 970 et 1028 déjà résolue deux fois dans les *Nouvelles Annales*.

Il s'agit de : *Trouver le lieu des sommets des triangles circonscrits à une ellipse et tels que les hauteurs passent par les points de contact des côtés opposés.*

M. Bourguet (t. XIII, p. 576), après avoir signalé les erreurs de calcul d'une solution antérieure, a donné une méthode générale de mise en équation du problème, mais il s'est trompé lui-même dans l'application qu'il en a faite à l'ellipse rapportée à ses axes, et, au lieu du résultat final qu'il indique, il faut lire

$$\frac{a^2x^2}{(S-U)^2}+\frac{b^2y^2}{(S+V)^2}=\frac{1}{R^2},$$

en posant $R=x^2+y^2-a^2-b^2$.

Puis supprimant, comme il l'indique, le facteur S dans les deux membres de l'équation rendue entière, on obtient, en effet, un lieu du huitième ordre, mais ce qui n'a pas été signalé jusqu'ici, c'est que ce lieu se décompose en deux autres de la façon suivante :

$$(4S+R^2)[4S^2-4RS(a^2+b^2)+3a^2b^2R^2]=0$$

(S désigne la fonction $a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2$).

Le premier lieu est le quadrilatère imaginaire ayant les quatre foyers pour sommets, le second est l'ensemble de deux coniques rapportées à leurs centres et à leurs axes, l'une intérieure, l'autre extérieure à l'ellipse donnée.

M. Bourguet avait étudié la forme du lieu sur l'équation du dixième ordre, mais il m'a paru intéressant de vous signaler cette décomposition, qui rend la discussion inutile. Elle est évidemment applicable au cas de l'hyperbole et donne dans la parabole une parabole intérieure à la première, le lieu extérieur s'éloignant à l'infini.

Permettez-moi, en terminant, d'indiquer pour le cas

d'une conique à centre une mise en équation plus rapide que celles données jusqu'ici.

Soit M (x, y) un point du lieu; on sait déterminer les coordonnées α, β du point N de concours des normales à l'ellipse aux points où elle est touchée par les tangentes menées de M; il suffit d'écrire que la droite MN est normale à l'ellipse pour obtenir l'équation du dixième degré mentionnée plus haut.

Nota. La question 1196, dont une solution se trouve dans le numéro de décembre dernier, a été résolue par M. Moreau, et, la question 1214, par M. Léopold Klug, à Pressburg (Hongrie).

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Lettres inédites de *Joseph-Louis Lagrange à Léonard Euler*, tirées des archives de la salle des conférences de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg; et publiées par *B. Boncompagni*, Membre ordinaire de l'Académie pontificale des *Nuovi Lincei*, Membre correspondant de l'Académie des Sciences de l'Institut de Bologne, des Académies royales des Sciences de Turin, et des Sciences, Lettres et Arts de Modène, et Membre honoraire de l'Académie royale des Sciences de Berlin. — Saint-Pétersbourg, Expédition pour la confection des papiers de l'État, Atelier héliographique dirigé par *G. Scamoni* (1877).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 21

(voir 1re série, t. I, p. 166);

PAR M. H. BROCARD.

Démontrer que la circonférence qui passe par les milieux des côtés d'un triangle a les propriétés suivantes :

1° *Elle passe par les pieds des trois hauteurs du triangle, et par les milieux des droites qui joignent le point de rencontre des trois hauteurs aux sommets du triangle.*

2° *Elle est tangente aux quatre cercles, tangents aux trois côtés du triangle.*

Soient A, B, C les sommets du triangle ; a, b, c les milieux des côtés ; H le point de rencontre des hauteurs ; a', b', c' les milieux des segments HA, HB, HC ; a'', b'', c'' les pieds des hauteurs.

Les neuf points a, b, c ; a', b', c' ; a'', b'', c'' sont situés sur une même circonférence, qui, pour cette raison, a reçu la dénomination de *cercle des neuf points*.

Les intéressantes et nombreuses propriétés de ce cercle sont enseignées ou, au moins, énoncées dans tous les cours, et aujourd'hui elles sont bien connues des élèves de nos classes de Mathématiques. Il en a été question dans presque tous les volumes des *Nouvelles Annales*, et depuis la fondation de ce recueil, époque à laquelle cet énoncé a été proposé, les propriétés du cercle des neuf points ont fait l'objet de diverses recherches, dont nous devrons nous borner à donner le résumé ou l'indication.

Cet énoncé peut, dans tous les cas, se traduire sous la forme suivante, plus abrégée et non moins précise :

Le cercle des neuf points, défini dans tout triangle, est tangent au cercle inscrit et aux cercles exinscrits.

Ces préliminaires établis, revenons aux deux propositions renfermées dans l'énoncé de la question **21**.

Considérons le trapèze $abca''$. Soit i le point où cb, parallèle à $Ba''a$, remontre AHa'' (*). Le point i est le milieu de Aa'', et $Ba'' = 2ci$; donc la droite Aa'' est parallèle à la bissectrice de l'angle des directions ba, ou cB, et ca''. Ainsi le trapèze $abca''$ est isoscèle, et la circonférence, passant par les points a, b, c, milieux des côtés du triangle, passe aussi par les points a'', b'', c'', pieds des trois hauteurs.

On peut établir, aussi aisément, que cette même circonférence passe par les points a', b', c'. En effet, décrivons la circonférence circonscrite au triangle ABC, et considérons les rayons vecteurs Ha'', Hb'', Hc'' prolongés jusqu'à leurs rencontres avec la courbe, aux points α, β, γ. Les angles HBa'', αAC sont égaux, comme ayant leurs côtés perpendiculaires; mais les angles inscrits αBC, αAC sont égaux : donc $\alpha BC = HBa''$; ainsi le point a'' est le milieu de $H\alpha$.

La circonférence abc peut donc être définie : la figure semblable au cercle circonscrit, le centre de similitude étant le point de rencontre des hauteurs, et le rapport de similitude $\frac{1}{2}$. Elle passe donc par les points a', b', c', milieux des rayons vecteurs HA, HB, HC.

La seconde proposition de l'énoncé se démontrerait aussi d'une manière très-simple; mais, pour ne pas reproduire presque textuellement des articles déjà publiés

---

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

dans ce journal, nous renverrons les lecteurs à ces démonstrations. Nous signalerons, néanmoins, à leur attention, celle que M. Gerono a exposée dans le t. IV (2e série, p. 220) des *Nouvelles Annales*. En suivant les indications de M. Hamilton, M. Gerono a fait connaître la détermination graphique des points de contact du cercle inscrit et de chacun des cercles exinscrits avec le cercle des neuf points.

Voici quelques remarques très-simples qu'il nous paraît utile de faire connaître :

Les droites ab, $a'b'$ sont parallèles à AB et égales à la moitié de AB. De même, les droites ab', ba' sont parallèles à CH et égales à la moitié de CH; mais CH est la hauteur correspondant au côté AB, ainsi le quadrilatère $aba'b'$ est un rectangle, et la circonférence circonscrite a son centre au point de rencontre O' des diagonales aa', bb'. De même, les angles bcb', $bc'b'$ sont droits et s'appuient sur les extrémités b, b' de la diagonale bb', diamètre de la circonférence. Celle-ci passe donc aux points c, c'.

Par les raisons données plus haut, cette circonférence doit passer par les points a'', b'', c''.

Si l'on désigne par O le centre du cercle circonscrit, on voit immédiatement que $Oa = Ha' = \frac{HA}{2}$ (théorème de Carnot).

Question 291

(voir 1re série, t. XIII, p. 192);

Par M. H. BROCARD.

m et r étant des nombres entiers positifs, si l'un des nombres $3^m + 1$, $3^{m+r} + 1$ *est divisible par* 10, *l'autre est aussi divisible par* 10.

Il conviendrait de présenter la question sous une forme plus indéterminée, et de l'énoncer de la manière suivante :

m et r étant des nombres entiers, sous quelle condition $3^{m+r}+1$ *est-il divisible par* 10, *lorsque* 3^m+1 *est divisible par* 10?

Il serait facile de voir, en effet, que la proposition donnée serait en défaut pour $r=1$, par exemple.

Dans la nouvelle hypothèse, 3^{m+1} étant divisible par 10, 3^m est terminé par le chiffre 9. Il faut donc que 3^{m+r} soit aussi terminé par le chiffre 9, ou que 3^r soit terminé par le chiffre 1. Or les puissances de 3 sont terminées par 1, 3, 7, 9, dans l'ordre périodique 1, 3, 9, 7; 1, 3, 9, 7; 1, ...; il s'ensuit que les valeurs de r qui correspondent au chiffré 1 sont 0, 4, 8, 12, ..., $4n$.

Ainsi l'énoncé primitif n'est pas d'une généralité absolue, et doit être rectifié comme il suit :

Si le nombre 3^m+1 *est divisible par* 10, $3^{m\pm 4n}+1$ *sera également divisible par* 10.

(*Voir* à ce sujet les questions du Concours général de 1874, *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XIV, p. 507).

QUESTIONS.

1224. Soit une famille de courbes planes représentées par l'équation $f(x, y, \alpha) = 0$, α étant un paramètre variable; trouver :

1° Le lieu des points où la tangente est parallèle à une droite donnée.

2° Le lieu des points où le rayon de courbure a une grandeur donnée.

Application aux paraboles de même axe et de même sommet, aux ellipses ayant un axe commun. (LAISANT.)

1225. Soient s, s' deux coniques dans un plan. Le lieu du point d'intersection des diamètres de l'une et de l'autre de ces courbes, correspondant à des cordes de même direction, est, en général, une conique. Examiner l'espèce de cette conique, d'après l'espèce et la position relative des coniques s, s'. (V. Androusski).

1226. Rendre calculable par logarithmes

$$\sin x = \frac{\sin a + \sin b}{1 + \sin a \sin b}.$$

(Catalan.)

1227. Si des différents points de la tangente au sommet d'une parabole on mène, aux rayons aboutissant au foyer, des perpendiculaires égales à ces rayons, le lieu de leurs extrémités se compose des deux tangentes à la parabole, inclinées de 45 degrés sur l'axe.

En conclure la propriété suivante du triangle ABC rectangle en A : soient a, b, c les centres des carrés respectivement construits sur l'hypoténuse et les deux côtés de l'angle droit; la ligne Aa est perpendiculaire, au point A, à la droite bAc, et elle lui est égale en longueur.

Application aux triangles dans lesquels on fait varier l'un des sommets B sur le côté AB. (H. Brocard.)

1228. Sur une normale menée par un ombilic O à une surface du second degré, il existe un point P tel, qu'en menant par ce point une transversale rectiligne, rencontrant la surface en des points M, M', l'angle MOM' est constamment droit, quelle que soit la direction donnée à la transversale. Et le plan polaire du point P, par rapport à la surface considérée, est parallèle à un plan cyclique de cette surface.

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]



102. Éliminons maintenant les expressions $|\varepsilon, \gamma|$, (ε', γ'), en nous servant des relations $(d, 87)$; soient E, F deux plans menés par la droite ε; E′, F′ deux plans menés par la droite ε',

$$(\varepsilon, \gamma) = \begin{vmatrix} (a, E) & (a, F) \\ (b, E) & (b, F) \end{vmatrix} \frac{1}{ab \sin EF},$$

$$|\varepsilon', \gamma'| = \begin{vmatrix} (a', E') & (a', F') \\ (b', E') & (b', F') \end{vmatrix} \frac{1}{a'b' \sin E'F'}.$$

Nos deux expressions deviennent, en observant que

$$(a, A)(b, B) = ab \sin AB \,|\gamma, \nu|,$$
$$(a', A')(b', B') = a'b' \sin A'B' \,|\gamma', \nu'|,$$

$$\sin EF \sin E'F' \cos \varepsilon\varepsilon'$$
$$= \sum \begin{vmatrix} (a, E) & (a, F) \\ (b, E) & (b, F) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (a', E') & (a', F') \\ (b', E') & (b', F') \end{vmatrix} \frac{\sin AB \sin A'B' \cos \nu\nu'}{(a, A)(b, B)(a', B')(b', B')},$$

$$(o, \varepsilon)(o, \varepsilon') \sin EF \sin E'F' \cos PP'$$
$$= \sum \begin{vmatrix} (a, E) & (a, F) \\ (b, E) & (b, F) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (a', E') & (a', F') \\ (b', E') & (b', F') \end{vmatrix} \frac{(o, \nu)(o, \nu') \sin AB \sin A'B' \cos NN'}{(a, A)(b, B)(a', A')(b', B')}.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481, 529, et t. XVI, p. 5, 160.

Lorsque ε' coïncide avec ε, les plans E′, F′ avec E, F,

$$\overline{\sin}^2 \mathrm{EF} = \sum \begin{vmatrix} (a, \mathrm{E}) & (a, \mathrm{F}) \\ (b, \mathrm{E}) & (b, \mathrm{F}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (a', \mathrm{E}) & (a', \mathrm{F}) \\ (b', \mathrm{E}) & (b', \mathrm{F}) \end{vmatrix} \frac{\sin \mathrm{AB} \sin \mathrm{A'B'} \cos \nu\nu'}{(a, \mathrm{A})(b, \mathrm{B})(a', \mathrm{A'})(b', \mathrm{B'})},$$

$$(o, \varepsilon)^2 \sin^2 \mathrm{EF} = \sum \begin{vmatrix} (a, \mathrm{E}) & (a, \mathrm{F}) \\ (b, \mathrm{E}) & (b, \mathrm{F}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (a', \mathrm{E}) & (a', \mathrm{F}) \\ (b', \mathrm{E}) & (b', \mathrm{F}) \end{vmatrix} \frac{(o, \nu)(o, \nu') \sin \mathrm{AB} \sin \mathrm{A'B'} \cos \mathrm{NN'}}{(a, \mathrm{A})(b, \mathrm{B})(a', \mathrm{A'})(b', \mathrm{B'})}.$$

La première de ces relations donne *le carré du sinus de l'angle de deux plans déterminés par leurs coordonnées.*

Si du point o on abaisse des perpendiculaires sur les plans E et F, la seconde relation donne *le carré de la distance des pieds de ces perpendiculaires.*

Corollaires de la relation $\mathrm{I}_{\mathrm{EE'}} = \sum \frac{(a, \mathrm{E})}{(a, \mathrm{A})} \mathrm{I}_{\mathrm{AE'}}$.

103. Lorsque la surface S est une sphère de rayon R,

$$(o, \mathrm{E})(o, \mathrm{E'}) - \mathrm{R}^2 \cos \mathrm{EE'} = \sum \frac{(a, \mathrm{E})}{(a, \mathrm{A})} [(o, \mathrm{A})(o, \mathrm{E'}) - \mathrm{R}^2 \cos \mathrm{AE'}];$$

mais $(o, \mathrm{E}) = \sum \frac{(a, \mathrm{E})}{(a, \mathrm{A})} (o, \mathrm{A})$; par conséquent,

$$\cos \mathrm{EE'} = \sum \frac{(a, \mathrm{E})}{(a, \mathrm{A})} \cos \mathrm{AE'} \qquad (4 \text{ termes}).$$

Cette relation donne le *cosinus de l'angle de deux plans dont l'un est déterminé par ses coordonnées, tandis que l'autre n'est déterminé qu'en direction.*

Un second tétraèdre $a'b'c'd'$ donnerait

$$\cos \mathrm{EE'} = \sum \frac{(a', \mathrm{E'})}{(a', \mathrm{A'})} \cos \mathrm{A'E};$$

portant dans la première expression de $\cos EE'$ les valeurs de $\cos AE'$, $\cos BE'$, ..., déduites de la seconde, on a, pour le *cosinus de l'angle de deux plans déterminés par leurs coordonnées*,

$$\cos EE' = \sum \frac{(a, E)(a', E')}{(a, A)(a', A')} \cos AA' \quad (16 \text{ termes}).$$

Si les plans coïncident,

$$1 = \sum \frac{(a, E)(a', E')}{(a, A)(a', A')} \cos AA'.$$

Si, en même temps, les tétraèdres se confondent,

$$1 = \sum \frac{(a, E)^2}{(a, A)^2} + 2\sum \frac{(a, E)(b, E)}{(a, A)(b, B)} \cos AB.$$

Si les plans EE' sont à l'infini, la relation générale donne

$$0 = \sum \frac{\cos AA'}{(a, A)(a', A')}.$$

104. Prenons dans le plan E trois points arbitraires e, f, g; dans le plan E' trois points également arbitraires e', f', g' et remplaçons dans l'expression de $\cos EE'$ les coordonnées des plans E et E' par les valeurs (88).

Nous trouvons d'abord

$$4 efg . e'f'g' \cos EE'$$
$$= \sum \begin{vmatrix} (e, C)(f, C)(g, C) \\ (e, B)(f, B)(g, B) \\ (e, D)(f, D)(g, D) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} (e', C')(f', C')(g', C') \\ (e', B')(f', B')(g', B') \\ (e', D')(f', D')(g', D') \end{vmatrix} \frac{\cos AA'}{(a, A)(a', A') \sin BCD \sin B'C'D'}.$$

Mais

$$2(a, A) \sin BCD = \frac{(3V)^2}{ABCD}, \quad 2(a', A') \sin B'C'D' = \frac{(3V')^2}{A'B'C'D'};$$

par suite,

$$\frac{(3V)^3}{ABCD}\frac{(3V')^3}{A'B'C'D'}efg.e'f'g'\cos EE'$$

$$=\sum\begin{vmatrix}(e,\ C)(f,\ C)(g,\ C)\\(e,\ B)(f,\ B)(g,\ B)\\(e,\ D)(f,\ D)(g,\ D)\end{vmatrix}\begin{vmatrix}(e',\ C')(f',\ C')(g',\ C')\\(e',\ B')(f',\ B')(g',\ B')\\(e',\ D')(f',\ D')(g',\ D')\end{vmatrix}\cos AA'.$$

Lorsque les points e', f', g' coïncident avec les points e, f, g, on a une expression du *carré de l'aire d'un triangle déterminé par les coordonnées de ses sommets.*

On ne devra pas oublier que, dans toutes les formules où figurent des angles formés par des plans, il faudra toujours prendre l'angle formé par des normales extérieures à ces plans, pour l'angle de ces plans eux-mêmes.

105. Par un point p menons trois plans rectangulaires E, F, G et par un point p' trois plans parallèles aux premiers. Appliquons aux trois systèmes de plans EE', FF', GG' la relation (19)

$$I_{EE'}=\sum\frac{(a,\ E)(a',\ E')}{(a,\ A)(a',\ A')}I_{AA'};$$

ajoutons les résultats, et rappelons-nous (81) que

$$I_{EE'}+I_{FF'}+I_{GG'}=\frac{op.op'\cos pop'-S_1^2}{\pi^2},$$

nous aurons ce théorème :

Étant donnés deux tétraèdres abcd, a'b'c'd', deux points p, p' et une surface S, *si l'on désigne par* α, α' *les droites pa, p'a', par* S_1^2 *la somme des carrés des demi-axes de la surface, par* π^2 *leur produit :*

$$\sum\frac{pa.p'a'\cos\alpha\alpha'}{(a,\ A)(a',\ A')}I_{AA'}=\frac{op.op'\cos pop'-S_1^2}{\pi^2}.$$

Nous pouvons remplacer les numérateurs par les expressions équivalentes (31, 4°)

$$pa.p'a'\cos\alpha\alpha' = \frac{1}{2}\left(\overline{pa'}^2 + \overline{ap'}^2 - \overline{pp'}^2 - \overline{aa'}^2\right),$$

de sorte que

$$\sum\frac{\overline{pa'}^2}{(a', A')}\sum\frac{I_{AA'}}{(a, A)} + \sum\frac{\overline{ap'}^2}{(a, A)}\sum\frac{I_{AA'}}{(a', A')}$$
$$- \overline{pp'}^2\sum\frac{I_{AA'}}{(a, A)(a', A')} - \sum\frac{\overline{aa'}^2}{(a, A)(a', A')}I_{AA'}$$
$$= \frac{\overline{op}^2 + \overline{op'}^2 - \overline{pp'}^2 - 2S_1^2}{\pi^2}.$$

Or (92), o étant le centre de la surface S,

$$\frac{(o, A')}{\pi^2} = \sum\frac{I_{AA'}}{(a, A)}, \quad \frac{(o, A)}{\pi^2} = \sum\frac{I_{AA'}}{(a', A')},$$

et

$$\sum\frac{I_{AA'}}{(a, A)(a', A')} = \frac{1}{\pi^2},$$

de sorte que

$$\sum\frac{\overline{pa'}^2(o, A')}{(a', A')} + \sum\frac{\overline{ap'}^2(o, A)}{(a, A)}$$
$$- \pi^2\sum\frac{\overline{aa'}^2 I_{AA'}}{(a, A)(a', A')} = \overline{po}^2 + \overline{p'o}^2 - 2S_1^2.$$

Circonscrivons des sphères aux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ et désignons par P_o, P'_o les puissances du centre o de S par rapport à ces sphères, nous avons (96)

$$\sum\frac{(o, A')}{(a', A')}\overline{pa'}^2 = \overline{po}^2 - P'_o, \quad \sum\frac{(o, A)}{(a, A)}\overline{p'a}^2 = \overline{p'o}^2 - P_o;$$

d'où ce théorème : *On donne une surface* S *et deux tétraèdres* $abcd$, $a'b'c'd'$; *si l'on désigne par* P_o, P'_o *les*

puissances du centre o de S par rapport aux sphères circonscrites aux tétraèdres, l'expression

$$P_o + P'_o + \pi^2 \sum \frac{\overline{aa'}^2}{(a, A)(a', A')} I_{AA'}$$

représente le double de la somme des carrés des demi-axes de la surface S.

Lorsque les deux tétraèdres coïncident, on a

$$P_o + \pi^2 \sum \frac{\overline{ab}^2}{(a, A)(b, B)} I_{AB} = S_1^2;$$

le signe somme contient six termes. Si la surface S est conjuguée au tétraèdre $abcd$, les indices I_{AB} sont nuls et

$$P_o = S_1^2;$$

nous retrouvons par une autre voie un théorème déjà démontré.

Lieu du centre des surfaces inscrites aux six plans A, B, C, D, E, F *dont la somme des carrés des axes est donnée.*

106. La surface S touchant les quatre faces du tétraèdre de référence, les distances du centre o à ces faces sont données par les relations (92)

$$\frac{(o, A)}{\pi^2} = \sum \frac{I_{AA}}{(a, A)}, \quad \frac{(o, B)}{\pi^2} = \sum \frac{I_{BA}}{(a, A)},$$
$$\frac{(o, C)}{\pi^2} = \sum \frac{I_{CA}}{(a, A)}, \quad \frac{(o, D)}{\pi^2} = \sum \frac{I_{DA}}{(a, A)},$$

dans lesquelles on fera

$$I_A = I_B = I_C = I_D = 0.$$

Les plans E et F touchant la surface S, on a

$$0 = \sum \frac{(a, E)(b, E)}{(a, A)(b, B)} I_{AB}, \quad 0 = \sum \frac{(a, F)(b, F)}{(a, A)(b, B)} I_{AB}.$$

De plus

$$\frac{1}{\pi^2}(S_1^2 - P_0) = \sum \frac{\overline{ab}^2}{(a, A)(b, B)} I_{AB}.$$

Si l'on élimine les indices entre ces sept équations, on trouve, après avoir chassé les dénominateurs,

$$0 = \begin{vmatrix} S_1^2 - P_0 & \overline{ab}^2 & \overline{ac}^2 & \overline{ad}^2 & \overline{bc}^2 & \overline{bd}^2 & \overline{cd}^2 \\ (o, A) & (a, A) & (a, A) & (a, A) & 0 & 0 & 0 \\ (o, B) & (b, B) & 0 & 0 & (b, B) & (b, B) & 0 \\ (o, C) & 0 & (c, C) & 0 & (c, C) & 0 & (c, C) \\ (o, D) & 0 & 0 & (d, D) & 0 & (d, D) & (d, D) \\ 0 & (a, E)(b, E) & (a, E)(c, E) & (a, E)(d, E) & (b, E)(c, E) & (b, E)(d, E) & (c, E)(d, E) \\ 0 & (a, F)(b, F) & (a, F)(c, F) & (a, F)(d, F) & (b, F)(c, F) & (b, F)(d, F) & (c, F)(d, F) \end{vmatrix}$$

De cette équation résulte

$$S_1^2 = P_0 + Q;$$

Q étant une fonction du premier degré des coordonnées du centre, le lieu est donc une sphère.

L'équation $P_0 + Q = 0$ représentant une sphère, nous voyons de plus que, quand une surface touche six plans, la somme des carrés des demi-axes de cette surface est égale à la puissance de son centre par rapport à une certaine sphère déterminée. Dès lors il est bien facile de caractériser cette sphère; car, si le point d désigne l'intersection ABC, et g l'intersection DEF, la droite dg est une des surfaces inscrites aux six plans, son centre o est le milieu de dg, et la somme des carrés de ses demi-axes est $\frac{\overline{dg}^2}{4}$. La sphère cherchée divise donc harmoniquement le segment dg; par conséquent, elle coupe orthogonalement la sphère qui a pour diamètre dg, ainsi que toutes celles que l'on peut décrire sur les dix diagonales de l'hexaèdre ABCDEF comme diamètres. Ce beau théorème est dû à M. Paul Serret; le suivant appartient au même géomètre.

107. Le lieu du centre des surfaces du second ordre conjuguées à six couples de plans AA', BB', CC', DD', EE', FF', et dont la somme des carrés des demi-axes est constante, est également une sphère dont nous pouvons donner l'équation.

Prenons pour tétraèdres de référence ABCD et A'B'C'D'. Nous avons pour première équation

$$\frac{1}{\pi^2}(2S_1^2 - P_0 - P'_0) = \sum \frac{\overline{aa'}^2}{(a, A)(a', A')} I_{AA'};$$

le signe somme contient seulement douze termes, puisque, par hypothèse, $I_{AA'} = I_{BB'} = I_{CC'} = I_{DD'} = 0$.

Pour éliminer les douze indices $I_{AB'}$, $I_{AC'}$, $I_{AD'}$, ..., nous avons d'abord les huit équations

$$\frac{(o, A')}{\pi^2} = \sum \frac{I_{AA'}}{(a, A)}, \quad \frac{(o, B')}{\pi^2} = \sum \frac{I_{AB'}}{(a, A)},$$

$$\frac{(o, C')}{\pi^2} = \sum \frac{I_{AC'}}{(a, A)}, \quad \frac{(o, D')}{\pi^2} = \sum \frac{I_{AD'}}{(a, A)},$$

$$\frac{(o, A)}{\pi^2} = \sum \frac{I_{AA'}}{(a', A')}, \quad \frac{(o, B)}{\pi^2} = \sum \frac{I_{BA'}}{(a', A')},$$

$$\frac{(o, C)}{\pi^2} = \sum \frac{I_{CA'}}{(a', A')}, \quad \frac{(o, D)}{\pi^2} = \sum \frac{I_{DA'}}{(a', A')}.$$

Puis, pour exprimer que les plans E, E', F, F' sont conjugués à la surface S, on a les quatre équations

$$o = \sum \frac{(a, E)(a', E')}{(a, A)(a', A')} I_{AA'}, \quad o = \sum \frac{(a, E')(a', E)}{(a, A)(a', A')} I_{AA'},$$

$$o = \sum \frac{(a, F)(a', F')}{(a, A)(a', A')} I_{AA'}, \quad o = \sum \frac{(a, F')(a', F)}{(a, A)(a', A')} I_{AA'}.$$

Entre les treize équations écrites, on peut éliminer les douze indices, et du déterminant que l'on obtient résulte la relation

$$2S_1^2 = P_0 + P'_0 + Q,$$

Q étant une fonction du premier degré des coordonnées du centre; par conséquent, la somme des carrés des demi-axes d'une surface conjuguée aux plans donnés est égale à la puissance de son centre par rapport à une sphère déterminée.

Équations par droites et par plans du cercle imaginaire situé à l'infini.

108. Si par le centre d'une sphère on mène deux diamètres rectangulaires, ces diamètres coupent le plan situé à l'infini en deux points qui sont conjugués par

rapport au cercle imaginaire situé dans ce plan, cercle par lequel passent toutes les sphères de l'espace. Si de même on mène deux plans diamétraux perpendiculaires, ils couperont le plan situé à l'infini, suivant deux droites conjuguées à ce cercle imaginaire. Or, puisque le centre de la sphère considérée est un point arbitraire, nous voyons que si, dans le plan situé à l'infini, on prend deux points conjugués au cercle imaginaire, deux droites quelconques menées par ces points sont toujours rectangulaires; et, si l'on prend dans ce même plan deux droites conjuguées au cercle imaginaire, deux plans quelconques menés par ces droites seront rectangulaires. Si les points conjugués coïncident, auquel cas ils se trouvent réunis en un point du cercle imaginaire, nous voyons que si, par un point de ce cercle, on mène une droite, elle est perpendiculaire à elle-même, et si les droites conjuguées viennent se confondre avec une tangente au cercle imaginaire, tout plan mené par cette tangente est perpendiculaire à lui-même.

Il suit de là, en ayant égard aux valeurs trouvées pour le cosinus de l'angle de deux droites et de deux plans, que

$$o = \sum \frac{|\varepsilon, \gamma| . |\varepsilon, \gamma'|}{|\gamma, \nu| \, |\gamma', \nu'|} \cos \nu\nu'$$

est l'équation par droites du cercle imaginaire situé à l'infini, et que

$$o = \sum \frac{(a, \mathrm{E})\,(a', \mathrm{E})}{(a, \mathrm{A})\,(a', \mathrm{A}')} \cos \mathrm{AA}'$$

est l'équation par plans de ce même cercle.

Quant à l'équation par points de ce cercle, elle ne saurait exister, mais il est facile d'écrire l'équation du cône qui a pour sommet un point quelconque *o*, et pour base le cercle imaginaire; car, l'équation générale

$I_\epsilon + 1 = 0$ du cône asymptote de la surface S donnant (23) $p_e = 0$ dans le cas de la sphère, nous avons (97) pour l'équation de ce cône

$$0 = \sum \frac{(e, A)(e, A')}{(a, A)(a', A')} p_{aa'}.$$

109. Nos formules conduisent facilement à ces résultats.

D'après les relations établies aux n°s 11, 12, 13, nous avons les suivantes :

$$I_{ee'} = -1 + oe.oe' I_{\epsilon\epsilon'};$$

ϵ, ϵ' sont les diamètres oe, oe';

$$I_{\epsilon\epsilon'} = I_{\epsilon_0\epsilon'_0} - (o, \epsilon)(o, \epsilon') I_{PP'};$$

P et P' sont les plans diamétraux menés par les droites ϵ et ϵ',

$$I_{EE'} = I_{E_0E'_0} + \frac{(o, E)(o, E')}{\pi^2}.$$

Si les points e, e' sont situés sur deux diamètres conjugués de la surface S, $I_{\epsilon\epsilon'} = 0$.

Si, dans la seconde, les droites ϵ, ϵ' sont parallèles à deux diamètres conjugués de S, $I_{\epsilon_0\epsilon'_0} = 0$.

Si, dans la troisième, les plans E, E' sont parallèles à deux plans diamétraux conjugués de S, $I_{E_0E'_0} = 0$, et nos trois relations donnent

$$I_{ee'} + 1 = 0, \quad I_{\epsilon\epsilon'} = -(o, \epsilon)(o, \epsilon') I_{PP'}, \quad I_{EE'} = \frac{(o, E)(o, E')}{\pi^2}.$$

Appliquées à la sphère, elles deviennent, en ayant égard aux relations 23, 24 et 25,

$$p_{ee'} = 0, \quad \cos\epsilon\epsilon' = 0, \quad \cos EE' = 0.$$

On sait que $p_{ee'} = oe.oe' \cos eoe'$. Remarquons que,

dans ces égalités, les points e, e' sont situés sur deux diamètres conjugués de la sphère, les droites ε, ε' vont rencontrer le plan de l'infini en deux points conjugués au cercle imaginaire situés dans ce plan, et les plans E, E' vont couper ce même plan suivant deux droites également conjuguées au cercle imaginaire de l'infini. Ces trois relations nous conduiront donc aussi aux trois équations écrites plus haut.

110. Indiquant par I et I' les indices pris par rapport aux surfaces S et S', posons

$$y_r = \begin{vmatrix} I_{aa'} & I_{ab'} & I_{ac'} & I_{ad'} & I'_{ae'} & I'_{af'} & \ldots & I'_{am'} \\ I_{ba'} & I_{bb'} & I_{bc'} & I_{bd'} & I'_{be'} & I'_{bf'} & \ldots & I'_{bm'} \\ I_{ca'} & I_{cb'} & I_{cc'} & I_{cd'} & I'_{ce'} & I'_{cf'} & \ldots & I'_{cm'} \\ I_{da'} & I_{db'} & I_{dc'} & I_{dd'} & I'_{de'} & I'_{df'} & \ldots & I'_{dm'} \\ I'_{ea'} & I'_{eb'} & I'_{ec'} & I'_{ed'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ I'_{fa'} & I'_{fb'} & I'_{fc'} & I'_{fd'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & . & . & . \\ I'_{ma'} & I'_{mb'} & I'_{mc'} & I'_{md'} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

la lettre r désignant le nombre des points $e, f, \ldots, m$; $e', f', \ldots, m'$. Soient $E', F', \ldots, M'$; $E, F, \ldots, M$ les plans polaires de ces deux groupes de points par rapport à la surface S'; si π' est le produit des demi-axes de cette surface, o' son centre,

$$I'_{ae'} = -\frac{(a, E)}{(o', E)}, \quad I'_{af'} = -\frac{(a, F)}{(o', F)}, \quad I'_{md'} = -\frac{(d', M')}{(o', M')}.$$

Substituant ces valeurs dans y_r, on trouve

$$(o', E)(o', F)\ldots(o', M)(o', E')(o', F')\ldots(o', M')\, y_r = x_r,$$

x_r étant le déterminant du nº 22. Mais, à cause des re-

lations

$$I'_{ee'} = -\frac{\pi'^2 I'_{EE'}}{(o',E)(o',E')}, \quad I'_{ef'} = -\frac{\pi'^2 I'_{FE'}}{(o',F)(o',E')}, \ldots,$$

on voit que

$$(o',E)(o',F)\ldots(o',M)(o',E')(o',F')\ldots(o',M')$$
$$= \frac{\begin{vmatrix} E & F & \ldots & M \\ E' & F' & \ldots & M' \end{vmatrix}'}{\begin{vmatrix} e & f & \ldots & m \\ e' & f' & \ldots & m' \end{vmatrix}'}(-\pi'^2)^r.$$

Nous ajoutons l'accent prime dans ces deux symboles pour indiquer que les indices doivent être pris par rapport à la surface S'. Nous avons donc, en remplaçant x_r par sa valeur,

$$\text{(A)} \qquad y_r = (-1)^r \frac{\pi^{2r}}{\pi'^{2r}} \frac{\begin{vmatrix} e & f & \ldots & m \\ e' & f' & \ldots & m' \end{vmatrix}'}{\begin{vmatrix} E & F & \ldots & M \\ E' & F' & \ldots & M' \end{vmatrix}'} \Delta_4 \nabla_r.$$

Pour développer le déterminant y_r, on aura égard aux relations du n° **14**,

$$I'_{ee'} = \sum \frac{(e,A)}{(a,A)} I'_{ae'}, \quad I'_{ee'} = \sum \frac{(e',A')}{(a',A')} I'_{ea'}.$$

En remplaçant dans la première le point e' par a', b', c', d', on obtiendra les valeurs de $I'_{ea'}$, $I'_{eb'}$, $I'_{ec'}$, $I'_{ed'}$; en remplaçant dans la seconde le point e par a, b, c, d, on obtiendra les valeurs de $I'_{ae'}$, $I'_{be'}$, $I'_{ce'}$, $I'_{de'}$. De même pour les autres termes. On se rappellera que $I'_{ee'} = 0$ est l'équation du plan polaire du point e' par rapport à S', le point e étant un point variable.

Pour $r = 1, 2, 3$, on a, en développant les valeurs

de y_r par rapport aux éléments relatifs à la surface S,

$$y_1 = -\sum \begin{vmatrix} I_{bb'} & I_{bc'} & I_{bd'} \\ I_{cb'} & I_{cc'} & I_{cd'} \\ I_{db'} & I_{dc'} & I_{dd'} \end{vmatrix} I'_{ae'} I'_{ea'}$$

$$= -4\Sigma\, bcd.b'c'd'\, I_{AA'} I'_{ae'} I'_{ea'},$$

$$y_2 = -\sum \begin{vmatrix} I_{cc'} & I_{cd'} \\ I_{dc'} & I_{dd'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I'_{ae'} & I'_{af'} \\ I'_{be'} & I'_{bf'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I'_{ea'} & I'_{eb'} \\ I'_{fa'} & I'_{fb'} \end{vmatrix}$$

$$= \Sigma\, ab.cd.a'b'.c'd'.ef.e'f'\, I_{\nu\nu'} I'_{\gamma\epsilon'} I'_{\epsilon\gamma'},$$

$$y_3 = -\sum I_{dd'} \begin{vmatrix} I'_{ae'} & I'_{af'} & I'_{ag'} \\ I'_{be'} & I'_{bf'} & I'_{bg'} \\ I'_{ce'} & I'_{cf'} & I'_{gc'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} I'_{ea'} & I'_{eb'} & I'_{ec'} \\ I'_{fa'} & I'_{fb'} & I'_{fc'} \\ I'_{ga'} & I'_{gb'} & I'_{gc'} \end{vmatrix}$$

$$= -16\Sigma\, abc.a'b'c'.efg.e'f'g'\, I_{dd'} I'_{DH'} I'_{HD'}.$$

Dans ces relations, ε et ε' sont les droites ef, $e'f'$; H et H' sont les plans efg et $e'f'g'$.

Remplaçant y_r par ces valeurs dans la relation (A), et substituant aux divers déterminants leurs valeurs, on trouvera, toutes réductions faites,

$$(\mathrm{B}) \quad \begin{cases} \dfrac{I_{EE'} I'_{ee'}}{I'_{EE'}} = -\pi'^2 \displaystyle\sum \dfrac{I_{AA'}}{(a, A)(a', A')} I'_{ae'} I'_{ea'}, \\ \dfrac{I_{\varphi\varphi'} I'_{\epsilon\epsilon'}}{I'_{\varphi\varphi'}} = -\pi'^2 \displaystyle\sum \dfrac{I_{\nu\nu'}}{|\gamma, \nu|\,|\gamma', \nu'|} I'_{\gamma\epsilon'} I'_{\epsilon\gamma'}, \\ \dfrac{I_{hh'} I'_{HH'}}{I'_{hh'}} = -\pi'^2 \displaystyle\sum \dfrac{I_{dd'}}{(d, D)(d', D')} I'_{DH'} I'_{HD'}. \end{cases}$$

Dans ces expressions, E' et E sont les plans polaires des points e, e'; les droites φ' et φ sont les polaires des droites ε, ε'; H' et H sont les plans polaires des points h et h'. Les polaires sont prises par rapport à la surface S'.

Remarque. — Lorsque les tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ sont polaires réciproques par rapport à S, ces relations

donnent celles du n° 58, car alors

$$-\pi^2 \frac{I_{AA'}}{(a, A)(a', A')} = \frac{1}{I_{aa'}}, \quad -\pi^2 \frac{I_{\nu\nu'}}{|\gamma, \nu|\,|\gamma', \nu'|} = \frac{1}{I_{\gamma\gamma'}},$$

$$-\pi^2 \frac{I_{dd'}}{(d, D)(d', D')} = \frac{1}{I_{DD'}}.$$

Désignons par Y_r le déterminant que l'on déduit de y_r en remplaçant les points $a, b, c, \ldots, m, a', b', \ldots, m'$ par les plans correspondants A, B, ..., M, A', B', ..., M'. On établira comme ci-dessus la relation

$$Y_r = (-1)^r \frac{\pi^{2r}}{\pi'^{2r}} \frac{\begin{vmatrix} E & F & \ldots & M \\ E' & F' & \ldots & M' \end{vmatrix}'}{\begin{vmatrix} e & f & \ldots & m \\ e' & f' & \ldots & m' \end{vmatrix}'} \nabla_4 \Delta_r;$$

d'où l'on déduira, pour $r = 1, 2, 3$,

$$C) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{I_{ee'} I'_{EE'}}{I'_{ee'}} &= -\pi'^2 \sum \frac{I_{aa'}}{(a, A)(a', A')} I'_{AE'} I'_{EA'}, \\ \frac{I_{\varepsilon\varepsilon'} I'_{\varphi\varphi'}}{I'_{\varepsilon\varepsilon'}} &= -\pi'^2 \sum \frac{I_{\gamma\gamma'}}{|\gamma, \nu|\,|\gamma', \nu'|} I'_{\nu\varphi'} I'_{\varphi\nu'}, \\ \frac{I_{HH'} I'_{hh'}}{I'_{HH'}} &= -\pi'^2 \sum \frac{I_{DD'}}{(d, D)(d', D')} I'_{dh'} I'_{hd'}. \end{aligned} \right.$$

Comme dans le déterminant y_r les points $e', f', \ldots, m'$; $e, f, \ldots, m$ sont, par rapport à S', les pôles des plans E, F,..., M; E', F',..., M', ε' et ε sont les droites $e'f'$, ef polaires des droites EF ou φ, E'F' ou φ'; H' et H sont les plans $e'f'g'$, efg plans polaires des points EFG ou h, E'F'G' ou h'.

Dans le développement du déterminant Y_r, on aura égard aux relations du n° 14

$$I'_{EE'} = \sum \frac{(a, E)}{(a, A)} I'_{AE'}, \quad I'_{EE'} = \sum \frac{(a', E')}{(a', A')} I'_{EA'}.$$

En remplaçant dans la première le plan E' par les

plans A′, B′, C′, D′, on obtiendra les valeurs de $I'_{EA'}$, $I'_{EB'}\ldots$; en remplaçant dans la seconde le plan E par les plans A, B, C, D, on obtiendra les valeurs de $I'_{AE'}$, $I'_{BE'},\ldots$.

Quant à la signification géométrique de ces divers indices, on se rappellera que $I_{EE'}=0$ est l'équation du pôle du plan E′ par rapport à la surface S′, E étant un plan variable.

111. Des relations précédentes résultent plusieurs conséquences; et d'abord, puisque l'équation $I'_{ee'}=0$, dans laquelle l'un des points est supposé fixe, représente le plan polaire de ce point par rapport à la surface S′, nous voyons que l'on peut, dans la valeur de y_r, considérer tous les indices primes comme représentant les plans polaires par rapport à S′ des sommets *abcd*, *a′b′c′d′*, des tétraèdres primitifs; ou bien encore, en vertu de la relation générale $I'_{ee'}=-\frac{(e,\,E)}{(o',\,E)}$, nous voyons que les indices par rapport à S′ sont proportionnels aux distances des points $e, f,\ldots, e', f',\ldots$, aux plans polaires des sommets des tétraèdres primitifs par rapport à S′, de sorte que l'équation $y_r=0$, quelle que soit d'ailleurs sa signification, se trouve rapportée non plus aux tétraèdres de référence *abcd*, *a′b′c′d′*, mais aux polaires de ces tétraèdres par rapport à S′.

Dans le cas particulier où la surface S′ coïncide avec S, les relations (B) se réduisent à

$$I_{ee'}=-\pi^2\sum\frac{I_{AA'}}{(a,\,A)(a',\,A')}I_{ae'}I_{ea'},$$

$$I_{\varphi\varphi'}=-\pi^2\sum\frac{I_{\nu\nu'}}{|\gamma,\nu|\,|\gamma',\nu'|}I_{\gamma\iota'}I_{\iota\gamma'},$$

$$I_{HH'}=-\pi^2\sum\frac{I_{dd'}}{(d,\,D)(d',\,D')}I_{DH'}I_{HD'},$$

et les tétraèdres de référence sont les polaires des tétraèdres primitifs par rapport à S. Si, par exemple, la surface S est conjuguée aux quatre couples aa', bb', cc', dd', auquel cas $I_{aa'} = I_{bb'} = I_{cc'} = I_{dd'} = 0$, les équations écrites ci-dessus, ou bien les déterminants

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0,$$

donnent, lorsque les points e', f', g' coïncident avec les points e, f, g l'équation générale par points, par droites et par plans des surfaces conjuguées à quatre couples de plans; et lorsque le tétraèdre $a'b'c'd'$ coïncidera avec $abcd$, on obtiendra dans ces trois cas respectivement l'équation par points, par droites et par plans des surfaces inscrites au système de quatre plans.

Le déterminant Y_r et les relations (C) donnent lieu à des remarques analogues; les indices affectés de l'accent représentent alors les pôles des faces des tétraèdres primitifs $abcd$, $a'b'c'd'$.

Équations par points, par droites, par plans de la polaire réciproque de la surface S *par rapport à* S'.

112. Dans le déterminant y_r faisons coïncider les points e', f', ..., m' avec les points e, f, ..., m, et continuons d'appeler y_r le déterminant ainsi modifié; en remplaçant v_r par sa valeur (8) on a, pour $r = 1, 2, 3$,

$$y_1 = -\frac{\pi^2}{\pi'^2}\frac{\Delta_4 I'_e}{I'_E} I_E,$$

$$y_2 = -\frac{\pi^2}{\pi'^4}\frac{\begin{vmatrix} e & f \\ e & f \end{vmatrix}'}{\begin{vmatrix} E & F \\ E & F \end{vmatrix}'}\Delta_4 \overline{\sin}^2 EFI_\varphi,$$

$$y_3 = -\frac{\pi^2}{\pi'^6}\frac{\begin{vmatrix} e & f & g \\ e' & f' & g' \end{vmatrix}'}{\begin{vmatrix} E & F & G \\ E' & F' & G \end{vmatrix}'}\Delta_4 \overline{\sin}\ \mathrm{EFGI}_h.$$

Si le plan E touche la surface S, $I_E = 0$, et le point e, pôle du plan E par rapport à S', appartient à la polaire réciproque de S par rapport à S'; donc l'équation $y_1 = 0$ est l'équation par points de cette polaire réciproque. Si la droite φ touche S, $I_\varphi = 0$; par conséquent $y_2 = 0$ est l'équation par droites de la polaire réciproque de S par rapport à S'. Enfin, si le point h est sur la surface S, $I_h = 0$, et $y_3 = 0$ est une équation par plans de la polaire réciproque de S par rapport à S'.

Si, dans le déterminant Y_r, on fait coïncider les plans E', F',..., M' avec les plans E, F,..., M, on verra, comme plus haut, que les équations

$$Y_1 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0,$$

ainsi modifiées, représentent respectivement l'équation par plans, l'équation par droites et l'équation par points de la polaire réciproque de la surface S par rapport à S'.

Les relations (B) et (C) conduisent également à diverses formes de l'équation de cette polaire.

113. Dans le cas où les surfaces S et S' sont rapportées à leur tétraèdre autopolaire *abcd*, ces relations peuvent s'écrire comme il suit :

$$\frac{(e, E)^2 I_E}{I_E'^2} = \sum \frac{(e, A)^2 I_A}{I_A'^2} \qquad (4 \text{ termes}),$$

$$\frac{|\varepsilon, \varphi|^2 I_\varepsilon}{I_\varepsilon} = \sum \frac{|\nu, \varphi|^2 I_\nu}{I_\nu'^2} \qquad (6 \text{ termes}),$$

$$\frac{(e, E)^2 I_e}{I_e'^2} = \sum \frac{(a, E)^2 I_a}{I_a'^2} \qquad (4 \text{ termes}).$$

Dans la première, si le plan E touche S, son pôle e par rapport à S' décrira la polaire réciproque

$$\sum \frac{(e, \mathrm{A})^2 \mathrm{I_A}}{\mathrm{I'^2_A}} = 0$$

de S par rapport à S'. Dans la seconde, si la droite ε touche S, la polaire φ par rapport à S' roulera sur la polaire réciproque $\sum \frac{|\nu, \varphi|^2 \mathrm{I_\nu}}{\mathrm{I'^2_\nu}} = 0$. Dans la troisième, si le point e est sur la surface S, son plan polaire E par rapport à S' touchera la polaire réciproque $\sum \frac{(a, \mathrm{E})^2 \mathrm{I}_a}{\mathrm{I'^2_a}} = 0$.

(*A suivre.*)

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

[SUITE (*).]

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS.

Nous avons trouvé que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)}{z - x} dz$$

était égale à $f(x)$, la fonction $f(z)$ étant monodrome, monogène, finie et continue autour du point x; soit donc

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)}{z - x} dz = f(x).$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVI, p. 78.

On voit que $f(x)$ a toujours une dérivée, car on peut ici différentier sous le signe $\int$ par rapport à x; cette dérivée en a une à son tour et ainsi de suite, ce qui est une propriété précieuse des fonctions monodromes et monogènes.

Si, dans la formule (1), on pose $z = x + re^{\theta\sqrt{-1}}$, elle devient

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(re^{\theta\sqrt{-1}} + x)\,d\theta = f(x);$$

cette formule contient, comme l'on voit, un grand nombre d'intégrales définies. La formule (1) donne, en la différentiant,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}} = \frac{1}{1.2.3\ldots n} f^n(x),$$

ou, en posant $z = re^{\theta\sqrt{-1}} + x$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x + re^{\theta\sqrt{-1}})\frac{d\theta}{r^n e^{n\theta\sqrt{-1}}} = \frac{1}{1.2.3..n} f^n(x).$$

En appelant alors M le maximum du module de $f(z)$ sur le cercle de rayon r décrit du point x comme centre, on a

$$\frac{1}{2\pi}\frac{M}{r^n}\int_0^{2\pi} d\theta > \text{mod.}\frac{1}{1.2..n} f^n(x),$$

ou

$$\text{mod.} f^n(x) < \frac{1.2.3\ldots n}{r^n} M,$$

ou

$$M > \frac{r^n \,\text{mod.} f^n(x)}{1.2.3\ldots n}.$$

Cette formule montre que, si toutes les dérivées de $f(x)$ ne sont pas constamment nulles, c'est-à-dire si $f(x)$ n'est

pas une constante, on pourra toujours prendre r assez grand pour que M croisse au delà de toute limite; donc :

THÉORÈME. — *Une fonction monodrome et monogène devient forcément infinie pour une valeur finie ou infinie de sa variable; donc aussi, la considération de son inverse prouve qu'elle s'annule pour une valeur finie ou infinie de sa variable; donc enfin l'équation $f(x)=0$ a nécessairement une racine.*

Reprenons les formules

$$(1)\qquad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}}=\frac{1}{1.2\ldots n}f^{n}(x),$$

$$(2)\qquad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)}{z-x}\,dz=f(x);$$

la dernière peut s'écrire

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left[\int\frac{f(z)}{z-a}\,dz+\int\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^2}(x-a)+\ldots\right.$$
$$+\int\frac{f(z)}{(z-a)^n}(x-a)^{n-1}\,dz$$
$$\left.+\int\frac{f(z)(x-a)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz\right]=f(x),$$

ou, en vertu de (1),

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\ldots$$
$$+\frac{(x-a)^{n-1}f^{n-1}(a)}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)(x-a)^n}{(z-x)^{n+1}}\,dz.$$

Ce dernier terme tend vers zéro pour $n=\infty$, pourvu que $x-a$ soit assez petit, et l'on voit que, pour $x=a$, toutes les dérivées de $f(x)$ ne sauraient être nulles, si $f(x)$ n'est pas une constante. Supposons que les $(n-1)$ premières dérivées seulement soient nulles et que la $n^{\text{ième}}$

ne le soit pas, la formule précédente se réduit à

$$f(x) = (x-a)^n \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)\,dz}{(z-x)^{n+1}};$$

le facteur de $(x-a)^n$ ne sera pas nul pour $x=a$, et l'on voit que, si $f(a)$ est nul, $f(x)$ sera de la forme

$$(x-a)^n \psi(x),$$

$\psi(x)$ restant fini pour $x=a$; donc :

Théorème. — *Une fonction monodrome et monogène n'a que des racines d'un ordre de multiplicité entier; il en est de même par suite de ses infinis.*

Voici une dernière proposition très-importante : Soit $f'(z)$ la dérivée de $f(z)$; les infinis de $\frac{f'(z)}{f(z)}$ seront simples et se réduiront aux zéros et aux infinis de $f(z)$. Soient $a_1, a_2, \ldots$ les zéros de $f(z)$ contenus dans le contour C, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ les infinis contenus dans le même contour; alors

$$f(z) = \frac{(z-a_1)^{m_1}(z-a_2)^{m_2}\ldots}{(z-\alpha_1)^{n_1}(z-\alpha_2)^{n_2}\ldots}\psi(z),$$

$\psi(z)$ n'étant plus ni nul ni infini dans le contour C; prenons les logarithmes et différentions, on aura

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum \frac{m}{z-a} - \sum \frac{n}{z-\alpha} + \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

Multiplions par $F(z)$, qui ne devient ni nul ni infini dans le contour C; nous aurons, en intégrant le long de ce contour,

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{F(z)f'(z)}{f(z)}\,dz = \Sigma m F(a) - \Sigma n F(\alpha).$$

Si l'on fait $F(z)=1$, on trouve $m-n$, c'est-à-dire la

différence entre le nombre des zéros et des infinis ; mais alors

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\log f(z)$$
$$=[\log f(z)]=m-n,$$

en désignant par $[\log f(z)]$ la quantité dont varie $\log f(z)$ le long du contour ; or

$$\log f(x)=\log \text{mod.} f(z)-2\pi\sqrt{-1}\ \text{arg.} f(z);$$

ainsi $m-n$ est la quantité dont varie l'argument de $f(z)$ le long du contour C, quand le point z effectue une révolution complète le long de ce contour.

Quand on prend $F(z)=z$, on a

$$\int\frac{f'(z)z}{f(z)}dz=\Sigma ma-\Sigma n\alpha.$$

(*A suivre.*)

SUR QUELQUES CAS DE SÉPARATION DES VARIABLES DANS L'ÉQUATION $Mdx+Ndy=0$;

PAR M. C. HARKEMA,

Professeur de Mathématiques au Gymnase philologique à Saint-Pétersbourg.

Lorsque l'équation différentielle

$$(1)\qquad Mdx+Ndy=0,$$

dont on se propose de trouver l'intégrale, ne rentre pas dans le nombre des types considérés ordinairement (c'est-à-dire lorsqu'elle n'est ni une différentielle totale, ni homogène par rapport aux variables, ou linéaire), c'est parfois un changement convenable de coordonnées (*) qui peut rendre des avantages considérables.

(*) Vu la signification géométrique de l'équation (1).

Je veux montrer, dans cette Note, qu'il est souvent possible de décider, à la seule inspection de l'équation, ou bien, par des calculs fort simples, dans quel cas le passage aux coordonnées polaires peut faciliter l'intégration en permettant de séparer les variables.

Si l'on pose

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

d'où

$$dx = \cos\theta\, dr - r\sin\theta\, d\theta, \quad dy = \sin\theta\, dr + r\cos\theta\, d\theta,$$

l'équation (1) devient

$$[\mathrm{M}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + \mathrm{N}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta]\frac{dr}{r}$$
$$+ [\mathrm{N}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta - \mathrm{M}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta]d\theta = 0;$$

ou bien, en omettant les parenthèses intérieures et en transformant,

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{M}\cos\theta + \mathrm{N}\sin\theta}{\mathrm{M}\sin\theta - \mathrm{N}\cos\theta}\cdot\frac{dr}{r} - d\theta = 0.$$

Dans cette équation, les variables pourront être séparées dès que l'expression

$$\frac{\mathrm{M}\cos\theta + \mathrm{N}\sin\theta}{\mathrm{M}\sin\theta - \mathrm{N}\cos\theta}$$

sera une fonction d'une seule variable r ou θ, ou bien, un produit de deux fonctions, tel que $\varphi(r)\psi(\theta)$.

On voit donc que, en posant, pour abréger, $\frac{\mathrm{M}\cos\theta + \mathrm{N}\sin\theta}{\mathrm{M}\sin\theta - \mathrm{N}\cos\theta} = \mathrm{P}$, les variables pourront être séparées dans les cas suivants :

1° $\quad \mathrm{P} = \mathrm{F}(r)$,

2° $\quad \mathrm{P} = f(\theta)$,

3° $\quad \mathrm{P} = \varphi(r)\psi(\theta)$,

en désignant par F, f, φ et ψ des fonctions quelconques.

Mais, comme

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{et} \quad \theta = \text{arc tang}\,\frac{y}{x},$$

on aura

$$P = \frac{Mx + Ny}{My - Nx},$$

et la séparation des variables pourra s'effectuer dès qu'on aura

1°, $$\frac{Mx+Ny}{My-Nx} = F_1(x^2+y^2),$$

2° $$\frac{Mx+Ny}{My-Nx} = f_1\left(\frac{y}{x}\right),$$

3° $$\frac{Mx+Ny}{My-Nx} = \varphi_1(x^2+y^2)\psi_1\left(\frac{y}{x}\right),$$

les fonctions F_1, f_1, φ_1 et ψ_1 étant différentes de celles que nous avons désignées par F, f, φ, ψ.

Application.

Soit proposé de trouver l'intégrale de l'équation

$$xy(x^2+y^2+1)dx + (y^4+x^2y^2-x^2)dy = 0.$$

Nous aurons, d'après ce qui précède,

$$P = \frac{x^2y(x^2+y^2+1)+y(y^4+x^2y^2-x^2)}{xy^2(x^2+y^2+1)-x(y^4+x^2y^2-x^2)} = \frac{y}{x}(x^2+y^2),$$

et nous sommes conduit au troisième cas.

L'équation en coordonnées polaires (2) sera, d'après cela,

$$\text{tang}\,\theta\, r dr - d\theta = 0,$$

et son intégrale

$$\frac{r^2}{2} - \log(C \sin \theta) = 0,$$

C désignant une constante.

L'intégrale de l'équation proposée sera donc

$$x^2 + y^2 - \log\left(\frac{C^2 y^2}{x^2 + y^2}\right) = 0.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (ANNÉE 1876)

(voir 2ᵉ série, t. XV, p. 470);

PAR M. MORET-BLANC.

On considère toutes les paraboles tangentes à deux droites rectangulaires OX, OY *et telles que la droite* PQ *qui joint leurs points de contact* P, Q *avec les deux droites passe par un point fixe donné* A.

1° *On demande le lieu du point d'intersection de la normale en* P *à l'une de ces paraboles avec le diamètre de la même courbe passant en* Q.

2° *On demande de déterminer le nombre des paraboles réelles qui passent par un point quelconque du plan.*

3° *On demande l'équation du lieu des points de rencontre de deux paraboles satisfaisant aux conditions proposées et dont les axes font un angle donné. On construira ce lieu dans le cas où l'angle donné est un angle de 45 degrés, et où le point donné* A *est sur la droite* OX.

Je prends pour axes de coordonnées les droites

OX, OY dans le sens où les coordonnées du point A sont positives.

Soient a et b ces coordonnées, et OP $= \alpha$, OQ $= \beta$.

L'équation générale des paraboles satisfaisant aux conditions de l'énoncé est

$$(1) \qquad \left(\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta}\right)^2 - 2\frac{x}{\alpha} - 2\frac{y}{\beta} + 1 = 0,$$

avec la condition

$$(2) \qquad \frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta} = 1,$$

qui exprime que la droite PQ passe par le point A.

$$\frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} = 0$$

est l'équation du diamètre passant par l'origine : le coefficient angulaire des diamètres est donc $\frac{\beta}{\alpha}$.

1° La normale en P à l'axe des paraboles et le diamètre de la même courbe passant en Q ont respectivement pour équations

$$x = \alpha,$$

$$y - \beta = \frac{\beta}{\alpha} x.$$

On aura l'équation du lieu de leurs points d'intersection en éliminant α et β entre ces deux dernières équations et l'équation (2), ce qui donne

$$(3) \qquad xy - 2bx - ay = 0.$$

Ce lieu est une hyperbole équilatère passant par le point O et ayant ses asymptotes parallèles aux droites OX, OY.

Les coordonnées du centre sont

$$x = a, \quad y = 2b.$$

Si l'on transporte l'origine au centre, l'équation devient

$$xy = 2ab.$$

2° Si x et y sont les coordonnées d'un point donné du plan, les équations (1) et (2) déterminent les paramètres α, β relatifs aux paraboles qui passent par ce point.

De l'équation (2) on tire

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{b} - \frac{a}{b\alpha}.$$

En reportant cette valeur dans l'équation (1), et multipliant par $b^2\alpha^2$ pour chasser les dénominateurs, il vient

$$(y-b)^2\alpha^2 - 2[y(bx+ay) + b(bx-ay)]\alpha + (bx+ay)^2 = 0,$$

d'où

$$\alpha = \frac{y(bx+ay) + b(bx-ay) \pm 2b\sqrt{xy(bx+ay-ab)}}{(y-b)^2}.$$

Soient B et C les projections du point A sur OX et OY;

$$bx + ay - ab = 0$$

est l'équation de la droite BC.

Cela posé, on aura deux valeurs réelles de α, et par suite deux paraboles réelles passant par le point donné, si ce point est situé: 1° dans l'angle des coordonnées positives du côté opposé à l'origine par rapport à BC; 2° dans l'un des angles adjacents, du même côté de BC que le point O.

Il n'y aura qu'une valeur de α, et par suite qu'une parabole, si le point donné est situé sur l'une des droites OX, OY, BC, et la parabole y sera tangente à cette droite;

$$xy(ax + by - ab) = 0$$

est, en effet, l'équation de l'enveloppe des paraboles, qui se compose par conséquent des trois côtés du triangle OBC.

Si le point donné est dans une autre région du plan, les valeurs de α sont imaginaires, et il n'y a pas de parabole réelle passant par ce point.

Remarque. — Toutes les paraboles satisfaisant aux conditions de l'énoncé étant inscrites au triangle OBC, le lieu de leurs foyers est la circonférence circonscrite à ce triangle.

3° Si l'on pose $\frac{\beta}{\alpha} = m$, d'où, en vertu de l'équation (2),

$$\alpha = \frac{am + b}{m}, \quad \beta = am + b,$$

l'équation (1) devient, en multipliant par $(am + b)^2$,

$$(mx - y)^2 - 2(am + b)(mx + y) + (am + b)^2 = 0.$$

L'équation d'une autre parabole dont le coefficient angulaire des diamètres est m' sera

$$(m'x - y)^2 - 2(am' + b)(m'x + y) + (am' + b)^2 = 0.$$

En ordonnant les deux équations par rapport à m et m', on a

$$(x - a)^2 m^2 - 2(xy + bx + ay - ab)m + (y - b)^2 = 0,$$
$$(x - a)^2 m'^2 - 2(xy + bx + ay - ab)m' + (y - b)^2 = 0.$$

Si μ est la tangente de l'angle donné que doivent faire les axes des deux paraboles, on a

$$\frac{m - m'}{1 + mm'} = \mu.$$

Or, m et m' étant les racines d'une même équation du

second degré de la forme $Am^2 - 2Bm + C = 0$, on a

$$m - m' = \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad 1 + mm' = \frac{A + C}{A};$$

donc

$$\sqrt{B^2 - AC} = \mu(A + C) \quad \text{ou} \quad B^2 - AC = \mu^2 (A + C)^2,$$

c'est-à-dire

$$(xy + bx + ay - ab)^2 - (x - a)^2 (y - b)^2$$
$$= \mu^2 [(x - a)^2 + (y - b)^2]^2$$

et, en réduisant,

$$(4) \quad 4xy(bx + ay - ab) = \mu^2 [(a - x)^2 + (y - b)^2]^2.$$

Le lieu des points d'intersection de deux paraboles satisfaisant aux conditions proposées, et dont les axes font entre eux un angle constant dont la tangente est μ, est donc une courbe du quatrième ordre jouissant de cette propriété que *le produit des distances de chacun de ses points aux trois côtés du triangle* OBC, *multiplié par* OA, *est à la quatrième puissance de la distance de ce point au point* A *dans un rapport constant* $\frac{\mu^2}{4}$.

Si l'angle des axes est de 45 degrés et que le point A soit sur OX, on a $\mu = 1$, $b = 0$.

L'équation du lieu se réduit à

$$4axy^2 = [(x - a)^2 + y^2]^2$$

ou

$$y^2 \mp 2\sqrt{ax}\, y + (x - a)^2 = 0;$$

d'où

$$y = \pm\sqrt{ax} \pm \sqrt{3ax - x^2 - a^2} = \pm\sqrt{ax} \pm Y,$$

en posant

$$Y = \sqrt{3ax - x^2 - a^2} = \sqrt{(x' - x)(x - x'')},$$

x' et x'' étant les racines de l'équation

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0,$$

savoir

$$x' = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5}), \quad x'' = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5}).$$

Pour construire la courbe, on construira d'abord la parabole

$$y^2 = ax,$$

puis entre les abscisses $\frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$ et $\frac{a}{2}(3 + \sqrt{5})$, on portera, à partir de chaque point de la parabole, des ordonnées positives et négatives égales à Y.

x croissant de $\frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$ à $\frac{3a}{2}$, Y croît de zéro à sa valeur maximum $\frac{a}{2}\sqrt{5}$; puis, x croissant de $\frac{3a}{2}$ à $\frac{a}{2}(3 + \sqrt{5})$, Y décroît de sa valeur maximum à zéro. Pour $x = a$, $Y = a$.

On obtient ainsi deux ovales placés symétriquement par rapport à l'axe OX, et ayant pour lignes diamétrales des cordes parallèles à OY les arcs de la parabole compris entre les abscisses $\frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$ et $\frac{a}{2}(3 + \sqrt{5})$.

Ces ovales touchent l'axe OX au point $x = a$, c'est-à-dire au point B.

Aux points correspondant à la valeur maximum de Y, les tangentes aux ovales sont respectivement parallèles aux tangentes à la parabole, aux points de même abscisse.

On obtient les points où la tangente est parallèle à OX en égalant à zéro la dérivée de y, ce qui donne l'équation

$$4x^3 - 11ax^2 + 6a^2x + a^3 = 0,$$

d'où

$$x = a, \quad y = 0,$$

$$x = \frac{a(7+\sqrt{65})}{8} = 1,88\,a,$$

$$y = \pm\frac{a}{8}\left(\sqrt{56+8\sqrt{65}} + \sqrt{10\sqrt{65}-20}\right) = \pm 3,475\,a.$$

Note. — La même question a été résolue par MM. Tourrettes; Agabriel, maître-répétiteur au lycée de Châteauroux; Georges Lambiotte et Jules Freson, élèves à l'École des Mines de Liége.

QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE.

2e SESSION. — OCTOBRE 1876.

SOLUTION DE M. MORET-BLANC.

On donne dans un plan un angle ROR′, *un point* A *sur la bissectrice* Ox *de cet angle, et deux points* B, B′ *placés symétriquement par rapport à* Ox.

On mène par le point A *une droite quelconque qui rencontre* OR *en* C *et* OR′ *en* C′; *on mène les droites* BC, B′C′, *ces droites se coupent en un point* M.

On demande le lieu décrit par le point M, *quand la droite* CAC′ *tourne autour du point* A.

On discutera le lieu en laissant fixes les droites OR, OR′ *et le point* A, *et en déplaçant le point* B, *et, par suite, le point* B′.

On indiquera dans quelles régions du plan doit être placé le point B *pour que le lieu soit une ellipse, une hyperbole, ou une parabole.*

Prenons pour axes la droite Ox et sa perpendiculaire menée par le point O.

Soient OA $= a$, α et β les coordonnées du point B;

$$y = mx,$$
$$y = -mx$$

les équations des droites OR, OR′, et

$$y = m'(x-a)$$

celle d'une droite menée par A; on en déduit

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{m'a}{m'-m} \\ y_1 &= \frac{mm'a}{m'-m} \end{aligned}\right\} \text{coordonnées du point C;}$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \frac{m'a}{m'+m} \\ y_2 &= \frac{-mm'a}{m'+m} \end{aligned}\right\} \text{coordonnées du point C'.}$$

La droite BC a pour équation

$$(y_1-\beta)x + (\alpha - x_1)y + \beta x_1 - \alpha y_1 = 0,$$

ou, en remplaçant x_1, y_1 par leurs valeurs, et mettant m' en facteur,

$$[(ma-\beta)x + (\alpha - a)y + (a\beta - ma\alpha)]m' = (m\alpha y - m\beta x).$$

L'équation de B′C′ s'en déduit en changeant β en $-\beta$ et m en $-m$

$$[-(ma-\beta)x + (\alpha-a)y - (a\beta - ma\alpha)]m' = -(m\alpha y + m\beta x).$$

Si l'on élimine m' en multipliant en croix, on obtient l'équation du lieu du point M

$$\beta(ma-\beta)x^2 + \alpha(\alpha - a)y^2 + a\beta(\beta - m\alpha)x = 0.$$

C'est une conique ayant un axe coïncidant avec Ox.

Cette conique sera une ellipse, une hyperbole, ou une parabole, selon que le produit

$$\alpha\beta(ma - \beta)(\alpha - a)$$

sera positif, négatif, ou nul.

Par le point A menons une perpendiculaire à Ox, qui rencontre OR en D, puis par D une parallèle à Ox, qui rencontre Oy en E.

On reconnaît sans peine que le lieu est une ellipse si le point B est dans l'une des bandes extérieures formées par le prolongement de deux côtés opposés du rectangle OEDA; une hyperbole s'il est dans l'intérieur du rectangle ou dans l'un des angles opposés par le sommet à ceux du rectangle; une parabole s'il est sur une des droites Oy, AD, DE indéfiniment prolongées.

Si le point B est placé sur Ox, la condition précédente semble indiquer une parabole; mais, en remontant aux équations des droites BC, B'C' qui, pour $\beta = 0$, deviennent

$$[ma(x - \alpha) + (\alpha - a)y]m' = m\alpha y,$$
$$[ma(x - \alpha) - (\alpha - a)y]m' = m\alpha y,$$

on voit qu'elles sont satisfaites par $x = \alpha$, $y = 0$, quel que soit m' : le lieu se réduit au point B, ce qui est d'ailleurs évident *a priori*.

Note. — La même question a été résolue par MM. Gambey; Brunot, élève au lycée de Dijon; Jules Freson et Georges Lambiotte, élèves de l'École des Mines de Liége.

M. Brunot a donné des solutions géométrique et analytique.

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. Desboves à M. Brisse. — Mon cher collègue, vous n'avez sans doute pas oublié qu'au retour des vacances je vous ai énoncé le théorème suivant

comme devant être démontré dans la prochaine édition de mes *Questions d'Algèbre* :

Si un solide est engendré par la révolution complète autour de son axe focal d'une conique dont l'équation est

$$y^2 = 2px + qx^2,$$

le volume V *d'un segment déterminé dans le solide par deux plans perpendiculaires à l'axe de révolution est donné par la formule*

$$V = \pi h\left(b''^2 + \frac{qh^2}{12}\right),$$

h et b'' étant la hauteur du segment et le rayon de la section médiane.

Or, comme je vois que le frère Gabriel-Marie a trouvé le même théorème, je tiens beaucoup à ce qu'il soit constaté que je ne lui ai rien emprunté.

Je saisis cette occasion pour rappeler que ce n'est pas dans mes *Questions de Géométrie*, mais dans mes *Questions d'Algèbre*, c'est-à-dire dès 1872, que j'ai publié le nouveau théorème relatif au segment sphérique. La démonstration que j'ai donnée est à peu près semblable à celle du frère Gabriel-Marie, qui ne la connaissait sans doute pas, puisqu'il cite ordinairement les auteurs des démonstrations qui ne lui appartiennent pas.

Je voudrais aussi prendre date pour le théorème suivant, que vous pouvez proposer comme exercice à vos lecteurs :

Si, dans un quadrilatère ABCD *dont on désigne les côtés* AB, BC, CD, DA *et les diagonales* AC, BD par *a, b, c, d, e, f, on a*

$$(1) \qquad \frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{ab + cd},$$

on a aussi nécessairement l'une des deux relations suivantes :

$$(2) \qquad ef = ac + bd,$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - e^2 - f^2)(ef + ac + bd) \\ \qquad - 2(ab + cd)(ad + bc) = 0, \end{array} \right.$$

et réciproquement l'une ou l'autre des équations (2) *et* (3) *entraîne nécessairement l'équation* (1).

P. S. — J'avais communiqué le théorème du segment à plusieurs autres personnes, entre autres à MM. Darboux et Niewenglowski.

En réponse aux observations critiques de M. Rey, publiées dans le cahier d'octobre 1875 des *Nouvelles Annales*, M. Lagout nous a récemment adressé une lettre qui paraîtra dans le prochain numéro du Journal.

La question d'admission à l'École Centrale (numéro d'avril, p. 180) a été résolue par M. Lez. La solution de M. Lez nous est parvenue trop tard pour qu'il ait été possible d'en faire mention dans le numéro d'avril.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. Éléments de la théorie des déterminants, avec application à l'Algèbre, la Trigonométrie et la Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace, à l'usage des classes de Mathématiques spéciales; par *G. Dostor*, docteur ès sciences, professeur de Mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences de l'Université catholique de Paris, Membre de la Société mathématique de France.

— Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire du Bureau des Longitudes, de l'École Polytechnique, successeur de Mallet-Bachelier, quai des Augustins, 55; 1877... 8 fr.

2. Sulle origini del metodo delle equipollenze, Memoria del prof. *Giusto Bellavitis,* Membro effettivo del R. Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti.

Venezia, presso la segreteria del R. Istituto del palazzo ducale. Tipografia di Giuseppe Antonelli.

3. Terza parte della tredicesima rivista di giornali, presentata al R. Istituto veneto nel luglio 1876, dal prof. *Giusto Bellavitis,* Membro effettivo del R. Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti.

4. Quarta ed ultima parte della tredicesima rivista di giornali, presentata al R. Istituto veneto di Scienze, Lettere ed Arti nel dicembre 1876, dal prof. *Giusto Bellavitis,* Membro effettivo dell' Istituto stesso.

5. Thèses présentées a la Faculté des Sciences de Paris, pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques, par M. *D. André,* ancien élève de l'École Normale :

1re Thèse. — *Développements en séries des fonctions elliptiques et de leurs puissances.*

2e Thèse. — *Terme général d'une série déterminée à la façon des séries récurrentes.* Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, quai des Augustins, 55; 1877.

6. *Mémoire sur les combinaisons régulières et leurs applications,* par M. *D. André.* Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, quai des Augustins, 55; 1876.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1177
(voir 2e série, t. XIV, p. 288).

Résoudre en nombres entiers positifs l'équation

$$(1) \qquad 1 + x + x^2 + x^3 = y^2.$$

(Brocard.)

Note du Rédacteur. — Deux solutions fondées sur des calculs différents m'ont été adressées; elles conduisent, l'une et l'autre, aux valeurs 1, 7 pour l'inconnue x; mais, dans aucune des deux, il n'est rigoureusement démontré que *x n'admet pas d'autres valeurs entières et positives,* ce qui reste à faire voir.

Afin de trouver *toutes* les valeurs entières de x, tant négatives que positives, je supposerai, successivement, $x < 0, = 0, > 0$.

Lorsque x est négatif, on a, en remplaçant x par $-z$,

$$1 - z + z^2 - z^3 = y^2, \quad (1 - z)(1 + z^2) = y^2,$$
$$z = 1, \; y = 0, \quad x = -1, \; y = 0.$$

Si $x = 0$, $y = \pm 1$.

Les hypothèses $x < 0, = 0$ ne donnant rien de plus, j'admettrai, dans ce qui va suivre, l'inégalité $x > 0$.

L'équation (1) peut s'écrire

$$(x + 1)(x^2 + 1) = y^2.$$

Les nombres entiers que $(x + 1)$ et $(x^2 + 1)$ représentent ont nécessairement un diviseur commun autre

que l'unité; car, s'ils étaient premiers entre eux, x^2+1 serait un carré, ce qui est évidemment impossible.

Ce diviseur commun est 2; cela résulte de l'identité $x^2+1=(x+1)(x-1)+2$.

Il s'ensuit que chacun des deux nombres $(x+1)$, (x^2+1) est le double d'un carré, de sorte qu'on a des égalités de la forme

$$x+1=2m^2, \tag{2}$$

$$x^2+1=2n^2. \tag{3}$$

L'élimination de x entre ces deux égalités conduit à l'égalité suivante :

$$m^4+(m^2-1)^2=n^2, \tag{4}$$

qui montre que n est un nombre impair, premier avec m et avec m^2-1.

Cela posé, je distingue deux cas, suivant que m est impair ou pair.

1° *m impair.* — L'équation (4) revient à

$$[n+(m^2-1)][n-(m^2-1)]=m^4. \tag{5}$$

Les nombres impairs $n+(m^2-1)$, $n-(m^2-1)$ sont premiers entre eux, puisque leur somme $2n$ et leur différence $2(m^2-1)$ n'ont pas d'autre diviseur commun que 2; donc chacun de ces deux nombres est égal à un *bicarré*. Soient

$$n+(m^2-1)=p^4, \quad n-(m^2-1)=q^4; \tag{6}$$

d'où

$$p^4q^4=m^4, \quad p^2q^2=m^2.$$

Des deux équations (6) on tire

$$p^4-q^4=2(m^2-1),$$

ou, à cause de $p^2q^2 = m^2$,

$$p^4 - q^4 = 2(p^2q^2 - 1), \quad q^4 + 2p^2q^2 - (p^4 + 2) = 0,$$
$$q^2 = -p^2 + \sqrt{2(p^4 + 1)}.$$

On voit par cette dernière équation que $p^4 + 1$ est le double d'un carré, ce qui exige que $p^2 = 1$ (*). De là,

$$q^2 = -1 + \sqrt{4} = 1, \quad m^2 = 1, \quad x = 1 \quad \text{et} \quad y = \pm 2.$$

Ainsi, lorsque m est impair, les solutions de l'équation $1 + x + x^2 + x^3 = y^2$ sont, en nombres entiers, $x = 1$, $y = +2$, et $x = 1$, $y = -2$.

2° *m pair.* — Dans l'équation

$$(5) \qquad [n + (m^2 - 1)][n - (m^2 - 1)] = m^4,$$

les facteurs $n + (m^2 - 1)$, $n - (m^2 - 1)$ représentent, actuellement, des nombres pairs; et, en posant

$$n + (m^2 - 1) = 2\alpha, \quad n - (m^2 - 1) = 2\beta, \quad \text{et} \quad m = 2r,$$

il vient

$$n = \alpha + \beta, \quad m^2 - 1 = \alpha - \beta, \quad 4\alpha\beta = m^4 = 16r^4, \quad \alpha\beta = 4r^4.$$

n et $m^2 - 1$ étant premiers entre eux, il en est de même de α, β; par conséquent, en vertu de l'égalité $\alpha\beta = 4r^4$, l'un des deux nombres α, β est le quadruple d'un *bicarré,* et l'autre un bicarré, c'est-à-dire qu'on a

$$\alpha = 4p^4, \quad \beta = q^4 \quad \text{ou} \quad \alpha = p^4, \quad \beta = 4q^4.$$

Mais les égalités $\alpha = p^4$, $\beta = 4q^4$ sont inadmissibles, parce qu'il en résulterait $m^2 - 1 = p^4 - 4q^4$, égalité absurde en ce que le premier membre est un multiple de 4 diminué de 1, et le second un multiple de 4

(*) Legendre, *Théorie des nombres*, t. II, p. 4 et 5, édition de 1830 : *L'équation $x^4 + y^4 = 2p^2$ est impossible, hors le cas $x = y$.*

augmenté de 1. Il faut donc prendre

$$\alpha = 4p^4, \quad 6 = q^4.$$

Il s'ensuit

$$m^2 - 1 = 4p^4 - q^4,$$

et

$$4p^4q^4 = 4r^4, \quad 4p^2q^2 = 4r^2 = m^2;$$

d'où

$$4p^2q^2 - 1 = 4p^4 - q^4, \quad q^4 + 4p^2q^2 - (4p^4 + 1) = 0,$$
$$q^2 = -2p^2 + \sqrt{8p^4 + 1}.$$

$8p^4 + 1$ devant être égal au carré d'un nombre impair, on a

$$8p^4 + 1 = (2k + 1)^2,$$

et, par suite,

$$\frac{k(k+1)}{2} = p^4,$$

équation qui donne

$$p^2 = 1, \quad \text{ou} \quad p = 0\ (*).$$

Pour $p^2 = 1$, $q^2 = -2 + \sqrt{9} = 1$,

$$m^2 = 4, \quad x = 7, \quad y = \pm 20,$$

et pour $p^2 = 0$, $q^2 = 1$,

$$m^2 = 0, \quad x = -1, \quad y = 0.$$

Ainsi, lorsque m est pair, les solutions de l'équation $1 + x + x^2 + x^3 = y^2$ sont, en nombres entiers,

$$x = 7, \quad y = \pm 20 \quad \text{et} \quad x = -1, \quad y = 0;$$

cette dernière solution a déjà été mentionnée.

De tout ce qui précède, nous concluons que l'équation

(*) Legendre, *Théorie des nombres*, t. II, p. 7, édition de 1830 : *Aucun nombre triangulaire* $\frac{1}{2}x(x+1)$, *excepté l'unité, n'est égal à un bicarré.*

indéterminée $1 + x + x^2 + x^3 = y^2$ admet les solutions

$$x = -1,\ y = 0;\quad x = 0,\ y = \pm 1;\quad x = 1,\ y = \pm 2;$$
$$x = 7,\ y = \pm 20;$$

et qu'elle ne peut être vérifiée par d'autres valeurs entières des inconnues x et y. (G.)

Question 1220

(voir 2ᵉ série, t. XVI, p. 48);

PAR M. A. LAISANT.

1220. *On a un certain nombre de cercles dans l'espace : des mobiles les parcourent avec des vitesses angulaires égales; leur centre de gravité décrit une ellipse qui a pour centre le centre de gravité des centres des cercles donnés.* (GENTY.)

Soient

ω la vitesse angulaire commune;

$C_1, C_2, \ldots, C_n$ les centres des cercles donnés;

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ les positions des mobiles à l'origine des temps;

H leur centre de gravité;

$B_1, B_2, \ldots, B_n$ les positions des mêmes mobiles au bout du temps $\frac{\pi}{2\omega}$;

K leur centre de gravité;

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ les positions des mobiles au bout du temps t;

Z leur centre de gravité.

On a

$$C_1X_1 \triangleq C_1A_1 \cos\omega t + C_1B_1 \sin\omega t,$$
$$C_2X_2 \triangleq C_2A_2 \cos\omega t + C_2B_2 \sin\omega t,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$C_nX_n \triangleq C_nA_n \cos\omega t + C_nB_n \sin\omega t.$$

Ajoutant et divisant par n,

$$GZ \doteq GH \cos \omega t + GK \sin \omega t,$$

équipollence d'une ellipse du centre G, ce qui démontre le théorème énoncé.

Ce théorème subsisterait évidemment si, au lieu de cercles, les mobiles parcouraient des ellipses avec des vitesses aréolaires constantes, en décrivant dans le même temps le circuit complet de chaque courbe.

Note. — La même proposition a été démontrée par MM. H.-J. Krantz, capitaine d'artillerie néerlandaise, à Bréda; Moret-Blanc; Brunot, élève en spéciales au lycée de Dijon; Joseph Bardelli, à Milan; P. Worms de Romilly, à Limoges; Conette, à Tours; Barbarin, élève à l'École Normale supérieure.

Question 1221

(voir même tome, p. 144);

PAR M. V. JAMET,
Professeur au lycée de Saint-Brieuc.

THÉORÈME. — *Étant donnés un tétraèdre quelconque* ABCD *et un point* O, *on peut faire passer par ce point trois droites qui rencontrent respectivement les arêtes*

AD, BC, en des points a, a';
BD, CA, ... b, b';
CD, AB, ... c, c'.

Si l'on construit sur ces arêtes les points conjugués harmoniques

α, α',
β, β',
γ, γ',

les six points b, c, b', c', α, α', *seront dans un même*

plan, et il en sera de même des six points c, a, c', a', β, β', et de a, b, a', b', γ, γ'. (H. Schröter.)

En effet, si l'on considère le plan P, conjugué harmonique du plan $bb'aa'$, par rapport aux deux plans bb'DA, bb'CB, on voit qu'il coupe les arêtes AB et CD en α et α'. Donc, les quatre points b, b', α, α' sont dans un même plan P.

De même, les quatre points c, c', α, α' sont dans un même plan P'. Mais les plans P, P' ayant trois points communs α, α', O coïncident : donc les six points b, c, b', c', α, α' sont dans un même plan (*).

Note. — Autres solutions de MM. J. Pisani et Berthomieu.

Question 1223

(voir même tome, p. 144);

Par M. V. JAMET,
Professeur au lycée de Saint-Brieuc.

Étant données deux hyperboles équilatères, trois de leurs points d'intersection et les deux points symétriques du quatrième, par rapport aux centres des deux hyperboles, sont situés sur un même cercle.

(Pellet.)

En général, une conique à centre et une hyperbole équilatère, dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la conique, se coupent en quatre points tels, que par trois d'entre eux et le point diamétralement opposé au quatrième on peut faire passer un cercle.

En effet, soient une conique à centre rapportée à ses axes,

$$\text{(1)} \qquad Ax^2 + A'y^2 = 1,$$

(*) Il est clair que cette démonstration s'applique à chacun des deux autres systèmes c, a, c', a', β, β' et a, b, a', b', γ, γ'.

et une hyperbole équilatère

(2) $$xy + mx + ny + p = 0.$$

L'équation qui représente un couple de sécantes communes est de la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + \lambda(xy + mx + ny + p) - 1 = 0.$$

Soient m et m' les coefficients angulaires de ces cordes, on a

$$mm' = \frac{A}{A'}.$$

D'ailleurs, si l'on désigne par m'' le coefficient angulaire de la corde de la conique (1) qui passe par une des extrémités de celle des deux sécantes dont le coefficient angulaire est m, et par le point diamétralement opposé à l'autre extrémité, on a

$$mm'' = -\frac{A}{A'},$$

d'où

$$m' = -m'';$$

donc les cordes dont les coefficients angulaires sont m' et m'' sont également inclinées sur les axes de la conique (1), et par conséquent leurs extrémités appartiennent à une même circonférence.

Cela posé, soient une hyperbole équilatère rapportée à ses axes

(3) $$x^2 - y^2 = a^2,$$

et une seconde hyperbole équilatère

(4) $$x^2 - y^2 + 2Bxy + 2lx + 2l'y + D = 0;$$

Par les quatre points d'intersection de ces deux courbes on peut faire passer une hyperbole équilatère dont l'équation est

(5) $$2Bxy + 2lx + 2l'y + D + a^2 = 0.$$

et, d'après ce qui précède, trois des points d'intersection des coniques (3) et (5), et le symétrique du quatrième par rapport à l'origine, sont sur un même cercle.

La conclusion eût été la même si l'on avait pris pour axes des coordonnées les axes de la conique (4). Or le cercle passant par trois des points d'intersection des coniques (2) et (4) et le symétrique du quatrième par rapport au centre de la conique (4) ne diffère pas du premier, puisque ces deux cercles ont trois points communs. La proposition est donc démontrée.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE;

PAR M. H. DESSOUDEIX,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Bordeaux.

Soient A, B, C trois des points d'intersection, le quatrième sera le point de concours M des hauteurs du triangle ABC; car on sait qu'une hyperbole équilatère circonscrite à un triangle passe par le point de rencontre de ses hauteurs. Je considère le cercle circonscrit au triangle ABC, et je dis que les symétriques de M par rapport aux centres des deux hyperboles se trouvent sur ce cercle. En effet, on sait que le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est le cercle des neuf points du triangle. Il faut donc démontrer que, si l'on joint le point M à un point quelconque R du cercle des neuf points, et que l'on prenne le symétrique R′ de M, ce point R′ se trouve sur le cercle circonscrit au triangle ABC. Pour cela, je considère le point de concours O des perpendiculaires élevées sur les milieux des côtés : ce point est le centre du cercle ABC; en outre, le milieu I de OM est le

centre du cercle des neuf points qui passe par le point P, pied de la hauteur AM du triangle. Le symétrique M′ de M par rapport à BC appartient au cercle ABC, et l'on a

$$\frac{MI}{MO} = \frac{MP}{MM'} = \frac{1}{2};$$

donc le point M est le centre de similitude des deux cercles, le rapport de similitude étant $\frac{1}{2}$ (*). Il s'ensuit que les symétriques du point M, par rapport au cercle des neuf points, se trouvent sur le cercle ABC.

Note. — La même question a été résolue par MM. Lez; Barthe, Berthomieu, Cauboue, élèves au lycée de Bordeaux; Cambier; L. B., à Vendôme; Louis Thuillier, du lycée d'Amiens; J. Pisani.

QUESTIONS.

1229. Si les trois racines de l'équation

$$x^3 - 3qx + r = 0$$

sont réelles, chacune d'elles est moindre que $2\sqrt{q}$; mais, si une seule de ces racines est réelle, sa valeur surpasse $2\sqrt{q}$. (R.-W. Genese.)

1230. Soient O un point fixe dans le plan du cercle PQR, et OPQ une sécante sur laquelle on prend un point S de manière que $OS = \lambda OP + \mu OQ$ (λ et μ étant des constantes) : démontrer que l'enveloppe d'une

(*) C'est une proposition connue qui résulte immédiatement de ce que le cercle des neuf points passe aux milieux des droites MA, MB, MC.

On sait aussi que les cercles circonscrits aux triangles MAB, MAC, MBC ABC sont égaux entre eux; donc, comme le remarque M. Cambier :

Quand deux hyperboles équilatères se coupent en quatre points, les quatre cercles circonscrits aux triangles formés par ces points pris trois à trois ont des rayons égaux. (G.)

perpendiculaire à PQ, menée par le point S, est une conique. (R.-W. Genese.)

1231. D'un point M on mène trois normales à une conique; soit P le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par les trois pieds de ces normales, et O le centre de la conique : démontrer que la droite OP et la quatrième normale que l'on peut mener du point M à la courbe sont également inclinées sur les axes.

Si la conique est une hyperbole équilatère, la droite OP passe par le pied de la quatrième normale.

(Laguerre.)

1232. En un point M d'une conique, on construit la parabole osculatrice et l'on prend le symétrique P du foyer de cette parabole par rapport à la tangente en M : démontrer que les points P et M sont réciproques par rapport au cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique. (Laguerre.)

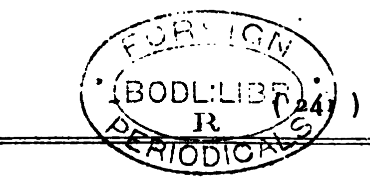
1233. Étant donnée une ellipse, soient a et b deux points quelconques réciproques par rapport au cercle, lieu des sommets des angles droits circonscrits à la conique; on prend le point β symétrique du point b par rapport à la polaire de a : démontrer que les points b et β ainsi que les deux foyers de l'ellipse sont situés sur un même cercle que ces points divisent harmoniquement. (Laguerre.)

1234. Intégrer l'équation différentielle

$$y\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=f(x),$$

$f(x)$ désignant un polynôme du troisième degré.

(Laguerre.)



NOUVEAUX THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE PROJECTIVE (*);

PAR M. AUGUSTE RIGHI,
Professeur de Physique à l'Institut technique royal de Bologne.

---

1. THÉORÈME. — *Si deux systèmes de points se correspondent un à un dans l'espace sous les conditions suivantes :*

1° *Qu'il existe une droite dont tous les points soient leurs propres correspondants ;*

2° *Que tout plan passant par cette droite contienne les points correspondants des siens ou, ce qui est la même chose, tout plan passant par cette droite ait soi-même pour correspondant ;*

3° *Qu'aucun plan n'ait tous ses points pour propres correspondants ;*

Il existe certainement une seconde droite qui n'est pas dans un même plan avec la première, jouissant des mêmes propriétés (**).

Soient X la première droite, un point a et son correspondant a' ; a, a' et X sont, par hypothèse, dans un même plan. Dans ce plan, chaque point de X a soi-même pour correspondant; en vertu d'un théorème connu, les droites qui joignent tout couple de points correspondants a, a' doivent se rencontrer dans un

---

(*) Extrait d'un appendice à un Mémoire *Sur la vision stéréoscopique* (*Nuovo Cimento*, 2e série, t. XIV).

(**) Ce théorème est analogue à deux autres bien connus, où les points qui sont leurs propres correspondants sont distribués sur un plan, et deux points correspondants quelconques se trouvent sur les rayons d'un faisceau. (*Voir* le *Cours de Statique graphique* professé à Milan en 1868-69 par M. Cremona, p. 268.)

même point A, qui sera son propre correspondant. Par X menons deux autres plans, et soient B, C les points de ces plans analogues à A. Je dis que les points A, B, C sont en ligne droite. En effet, s'ils n'y étaient pas, ils détermineraient un plan qui couperait X en un point D. Et, comme dans ce plan il y aurait quatre points A, B, C, D, chacun desquels serait son propre correspondant, et dont il n'y aurait pas trois en ligne droite, par un théorème connu, tout point de ce plan devrait être son propre correspondant, ce qui est contraire à la troisième hypothèse. Il faut donc que A, B, C soient sur une même droite Y. Cette droite Y jouit des mêmes propriétés que X. En effet, tout point de Y est son propre correspondant (car cela se vérifie déjà pour trois de ses points A, B, C), et tout plan passant par Y est son propre correspondant, c'est-à-dire qu'il contient tous les points correspondants des siens; car à tout plan P passant par Y doit corrrespondre un plan passant par Y et par le point où P coupe X, c'est-à-dire le plan P lui-même.

Notre raisonnement prouve d'ailleurs qu'il n'existe pas, en dehors des droites X et Y, d'autres points qui soient leurs propres correspondants; ni, en dehors des plans menés par X et par Y, d'autres plans qui contiennent les points correspondants des leurs.

2. Si a est un point de l'un des systèmes, son correspondant a', devant se trouver à la fois dans le plan Xa et dans le plan Ya, sera sur l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire sur la droite menée par a qui s'appuie sur X et Y.

3. Soit N le point où un plan mené par Y coupe X. A chaque point a de ce plan correspondra un point a'

situé sur la droite aN; de telle sorte que les figures formées par les points a et par les points a' seront deux figures planes homologiques, ayant N pour centre et Y pour axe d'homologie, et que le rapport anharmonique $\frac{Na}{Ma} : \frac{Na'}{Ma'}$ ou, d'après la notation en usage, $(\mathrm{NM}aa')$, sera égal à une constante Δ. Par X, menons un plan quelconque : il coupera le premier plan YN suivant une droite NT, T étant situé sur Y. Dans ce nouveau plan, on aura également deux figures homologiques ayant T pour centre et X pour axe d'homologie, et, si l'on désigne par b et b' deux points homologues de ce plan, le rapport $(\mathrm{TV}\,bb')$, V étant le point où bb' coupe X, sera aussi constant. Soient d'ailleurs c et c' deux points correspondants pris sur TN ; on aura, puisqu'ils font partie des deux plans,

$$(\mathrm{TN}cc') = (\mathrm{TV}bb') \quad \text{et} \quad (\mathrm{TN}cc') = (\mathrm{MN}aa');$$

donc

$$(\mathrm{TV}bb') = (\mathrm{MN}aa') \quad \text{ou} \quad (\mathrm{VT}bb') = (\mathrm{NM}aa') = \Delta.$$

Le rapport Δ est donc le même pour tout couple de points correspondants ; par conséquent, pour trouver le point correspondant a' d'un point donné a, il suffit de mener par a la droite qui s'appuie sur X et sur Y et de construire le point a' tel que $(\mathrm{NM}aa') = \Delta$. Je propose d'appeler ce mode particulier de correspondance *homologie à deux axes ;* X et Y seront les *axes d'homologie* et Δ le *rapport caractéristique*. L'homologie ordinaire prendrait alors le nom d'*homologie centrale*.

4. Si nous regardons le point b comme appartenant au plan YV, les figures planes dont b et b' font partie seront homologiques, avec V pour centre et Y pour axe ;

on aura de plus

$$(\mathrm{VT}\,bb') = (\mathrm{NM}\,aa') = \Delta.$$

Cette remarque va nous conduire à une conception nouvelle de l'homologie à deux axes.

Que l'on construise, en effet, dans le plan YN, les figures homologiques ayant N pour centre, Y pour axe, et Δ pour rapport constant; que l'on mène par N une droite X, puis que, sur chaque plan passant par Y, comme YV, on trace les figures homologiques ayant Y pour axe, pour centre le point de rencontre V du plan avec X, et pour rapport Δ : on obtiendra ainsi deux systèmes de points correspondants constituant l'homologie à deux axes.

5. Sur chaque plan passant par Y, on a donc deux figures homologiques. Aux points infiniment éloignés de l'une correspondent les points d'une *droite limite*, parallèle à Y. Toutes ces droites forment deux *plans limites* parallèles à Y; chacun de ces plans est, dans l'un des systèmes, le lieu des points qui correspondent aux points infiniment éloignés de l'autre. Et, comme ce qui a lieu pour Y doit avoir aussi lieu pour X, les plans limites sont simultanément parallèles à X et à Y.

6. Lorsque deux systèmes de points forment une homologie à deux axes :

A toute droite qui coupe l'un des axes correspond une droite coupant cet axe au même point;

A toute droite qui rencontre les deux axes correspond la droite elle-même;

A toute droite parallèle à l'un des axes correspond une droite parallèle à cet axe;

A un plan quelconque correspond un plan coupant les axes aux mêmes points;

A un plan parallèle à un axe (ou aux deux axes) correspond un plan parallèle au même axe (ou aux deux axes).

Les droites qui joignent les points d'une droite d'un des systèmes aux points correspondants de l'autre sont les génératrices d'un hyperboloïde à une nappe dont la droite donnée, sa correspondante et les deux axes appartiennent à l'autre système de génératrices de l'hyperboloïde; donc, à un hyperboloïde passant par les deux axes correspond l'hyperboloïde lui-même; et tandis que, dans l'homologie ordinaire, une droite est projetée par un plan, elle l'est ici par un hyperboloïde. Seulement, lorsque l'une des droites correspondantes, et par conséquent l'autre aussi, coupent l'un des axes, l'hyperboloïde devient un plan.

Les figures planes correspondantes quelconques ne sont pas la perspective l'une de l'autre; il ne faut pas les confondre non plus avec les figures obtenues par la *projection gauche* (*), avec lesquelles elles ont toutefois quelque analogie.

7. Si $\Delta = -1$, l'homologie à deux axes pourra s'appeler *harmonique*. Les deux plans limites coïncideront alors en un plan unique, qui sera situé à égale distance de chacun des axes. Les éléments des deux systèmes auront une double correspondance, c'est-à-dire que, si à un point a du premier correspond un point a' du second, au point a' considéré comme appartenant au premier correspondra a dans le second. Les points correspondants, qui seront sur une droite quelconque coupant les deux axes, formeront ici une involution du second ordre.

Les objets réels et les objets qu'on voit lorsqu'on re-

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. IV, p. 385; 1865.

garde dans un pseudoscope de Wheatstone constituent deux systèmes homologiques harmoniques à deux axes, et les axes sont à angle droit. C'est en établissant la théorie de cet instrument que j'ai été conduit aux théorèmes qui forment l'objet de cette Note.

8. Si l'un des axes, X par exemple, est infiniment éloigné, comme une droite à l'infini détermine l'orientation d'un système de plans parallèles, les droites sur lesquelles se trouvent les couples des points correspondants seront parallèles à un même plan, dont X sera la droite de l'infini, et qu'on pourra appeler *plan directeur*. Dans ce cas, les droites sont projetées par des paraboloïdes, et les plans limites coïncident avec le *plan de l'infini*; et comme (NMaa') devient ici (∞ Maa'), on aura $\Delta = \frac{a'M}{aM}$; c'est-à-dire que les distances de l'axe Y à deux points correspondants, comptées sur la droite aa', seront dans un rapport constant. Le cas actuel est donc analogue, soit à l'homothétie, soit à la similitude homologique; car tout plan passant par Y coupe les deux systèmes suivant deux systèmes plans homologiquement semblables, et tout plan parallèle au plan directeur, suivant deux figures homothétiques ayant leur centre sur Y. Si $\Delta = -1$, on a $a'M = Ma$, et les deux systèmes sont symétriques par rapport à Y; symétrie oblique ou orthogonale, suivant l'angle que fait Y avec le plan directeur.

On doit remarquer que la similitude homologique par rapport à un plan ou à un point, la symétrie par rapport à un plan ou à un point, sont des cas particuliers de l'homologie ordinaire; mais on ne peut pas en déduire la symétrie de deux systèmes solides par rapport à un axe. L'homologie à deux axes comble cette lacune.

9. L'homologie à deux axes peut aussi être envisagée d'une autre manière. Que l'on prenne, sur une droite Y, deux points quelconques L et M, et que l'on forme le système Σ_2 homologique à un système donné Σ_1, en prenant L pour centre d'homologie centrale, le plan XM pour plan d'homologie (X étant une autre droite donnée), et un rapport anharmonique constant Δ : soit a_2 le point de Σ_2 correspondant à un point a_1 de Σ_1 ; puis que l'on construise le système Σ_3 homologique à Σ_2, en prenant M pour centre, XL pour plan d'homologie et toujours Δ pour rapport caractéristique : soit a_3 le point de Σ_3 qui correspond à a_2 ; je dis que les systèmes Σ_1 et Σ_3 forment une homologie à deux axes, ayant pour axes X et Y, et pour rapport anharmonique Δ. Soient, en effet, LN, MN les intersections des plans XL et XM avec le plan Ya_1, R le point où La_2a_1 coupe MN, S celui où Ma_2a_3 coupe LN ; on aura $(\mathrm{LR}\, a_1 a_2) = (\mathrm{MS}\, a_2 a_3) = \Delta$. Les deux faisceaux M $(\mathrm{LR}\, a_1 a_2)$, c'est-à-dire formé des droites ML, MR, $\mathrm{M}a_1$, $\mathrm{M}a_2$, et L $(\mathrm{MS}\, a_2\, a_3)$ seront donc projectifs ; et comme ML est un rayon qui coïncide avec son correspondant, les autres couples de rayons correspondants se couperont sur une même ligne droite. Les points N, a_1, a_3 sont donc en ligne droite, ou, ce qui est la même chose, le point a_3 est sur la droite qui passe par a_1 et s'appuie sur X et Y. Soit T le point où cette droite rencontre Y. En outre, les points T, N, a_1, a_3 peuvent être considérés comme les projections des points M, S, a_2, a_3, faites de L sur NT ; donc $(\mathrm{TN}\, a_1 a_3) = \Delta$. Ainsi les systèmes Σ_1 et Σ_3 forment une homologie à deux axes ayant pour rapport Δ. Pour former ce rapport $\Delta = (\mathrm{TN}\, a_1 a_3)$, on doit commencer par le point T qui appartient à celle des deux droites X et Y sur laquelle on a choisi les deux points M et N.

Si l'on avait pris pour M le point à l'infini sur Y, on

aurait obtenu $\frac{Sa_3}{Sa_1} = \Delta$. Si $\Delta = -1$ et si M est à l'infini, on passe de Σ_1 à Σ_3 à l'aide de deux transformations, l'une homologique, l'autre symétrique.

10. Du théorème qui précéde, on déduit aisément le suivant : Prenons quatre points M_1, M_2, M_3, M_4, qui ne soient pas dans un même plan ; soit a_1 un point d'un système donné Σ_1. Construisons le système Σ_2, homologique à Σ_1, avec M_1 pour centre d'homologie, $M_2 M_3 M_4$ pour plan d'homologie et Δ pour rapport caractéristique ; soit a_2 le point de Σ_2 qui correspond à a_1. Formons de même le système Σ_3 homologique à Σ_2, en prenant M_2 pour centre, $M_3 M_4 M_1$ pour plan d'homologie et Δ pour rapport; soit a_3 le point de Σ_3 qui correspond à a_2. En vertu du théorème précédent, les points a_3 et a_1 seront sur une même droite NT qui rencontrera les droites $M_3 M_4$ et $M_1 M_2$ en N et T, et $(\text{TN}\, a_1\, a_3)$ sera égal à Δ.

Formons de même le système Σ_4 homologique à Σ_3, en prenant M_3 pour centre, $M_4\, M_1\, M_2$ pour plan et Δ pour rapport d'homologie ; soit a_4 le point de Σ_4 qui correspond à a_3. Formons enfin le système Σ_5 homologique à Σ_4, avec M_4 pour centre, $M_1 M_2 M_3$ pour plan d'homologie, et toujours Δ pour rapport caractéristique ; je dis que Σ_5 n'est que le système primitif Σ_1. En effet, soit, pour un moment, a_5 le point de Σ_5 qui correspond à a_4. Les points a_3 et a_5, en vertu du théorème précédent, doivent se trouver sur une même droite qui rencontre $M_3 M_4$ et $M_1 M_2$; a_5 sera donc sur NT. On doit aussi avoir $(\text{NT}\, a_3\, a_5) = \Delta$; mais $(\text{TN}\, a_1\, a_3) = (\text{NT}\, a_3 a_1) = \Delta$; donc a_5 coïncide avec a_1 et Σ_5 avec Σ_1. On peut énoncer ce théorème de la manière suivante : *Étant donné un système quelconque, si l'on construit successivement les systèmes homologiques, avec les sommets d'un té-*

traèdre, pris dans un ordre quelconque, pour centres d'homologie, les plans des faces opposées pour plans d'homologie, et un rapport anharmonique caractéristique constant, on retombe sur le système primitif.

Si un, deux, ou trois des points M_1, M_2, M_3, M_4 sont infiniment éloignés, on obtient trois théorèmes faciles à énoncer. Si M_4 et a_1 sont dans le plan $M_1 M_2 M_3$, on arrive à un théorème relatif au triangle dans le plan, analogue au théorème que je viens de démontrer pour le tétraèdre dans l'espace.

Tous les théorèmes qui précèdent peuvent s'établir par l'Analyse. Mais je renvoie pour cela le lecteur au Mémoire original.

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]

Surfaces homofocales.

114. THÉORÈME. — *Lorsque deux plans* E, E′ *sont conjugués par rapport à deux homofocales, ils sont rectangulaires et conjugués à toutes les homofocales du système.*

Désignant par ρ le paramètre de l'homofocale de la surface S, qui est conjuguée aux deux plans E, E′, on a (54)

$$I_{EE'} = \rho \frac{\cos(E, E')}{\pi^2}.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481, 529, et t. XVI, p. 5, 160, 193.

Si ces deux plans sont conjugués à la surface S, $I_{EE'} = 0$; il faut donc aussi que $\cos EE' = 0$. Les deux plans sont donc rectangulaires, et cela quelle que soit la valeur du paramètre ρ.

115. *Deux surfaces homofocales se coupent à angle droit.*

Soit m un point commun aux homofocales ρ et ρ' de la surface S, menons les plans tangents en ce point aux deux surfaces. Ces plans sont conjugués par rapport aux deux homofocales, puisque chacun d'eux passe par le point de contact de l'autre. Ils sont donc rectangulaires (114).

116. *Lorsque deux homofocales touchent une même droite, les plans tangents menés par cette droite aux deux surfaces sont rectangulaires.*

Soient m, m' les points de contact des homofocales ρ, ρ' avec la droite α; menons par cette droite les plans tangents aux deux surfaces. Ces plans sont conjugués par rapport aux deux homofocales, puisque chacun d'eux passe par le point de contact de l'autre. Ils sont donc rectangulaires.

117. *Le lieu du pôle d'un plan fixe* M *par rapport à un système de surfaces homofocales est une droite perpendiculaire au plan.*

Soit m le pôle du plan M par rapport à la surface S; menons l'homofocale ρ qui touche le plan M, et soit p le point de contact. Joignons pm, et par cette droite imaginons un plan quelconque N. Les plans M et N sont conjugués aux surfaces S et ρ, ils sont donc rectangulaires; et, puisque le plan N est quelconque, il faut que pm soit perpendiculaire au plan M.

118. *Trouver la distance d'un plan tangent à une surface au pôle de ce plan par rapport à une homofocale de cette surface.*

Soient D un plan qui touche l'homofocale ρ de la surface S et d le pôle de ce plan par rapport à S. Par définition, $I_D = \frac{(o, D)(d, D)}{\pi^2}$. Mais on a aussi $I_D = \frac{\rho}{\pi^2}$; il en résulte

$$(d, D) = \frac{\rho}{(o, D)}.$$

Remarque. — Si le plan D touchait la surface S et que d fût son pôle par rapport à l'homofocale ρ, on aurait

$$(d, D) = -\frac{\rho}{(o, D)}.$$

119. D'après le n° 54, les indices pris par rapport à la surface S s'expriment à l'aide des paramètres des homofocales de cette surface, d'où il suit que tout théorème relatif aux indices en donne immédiatement un autre relatif aux paramètres des homofocales. Nous ne citerons que les plus simples, déduits des théorèmes énoncés au n° 85.

D'après 7° : *Si par une droite v on mène deux plans conjugués à la surface S, le produit des paramètres des homofocales qui touchent les plans est égal au carré du sinus de l'angle de ces plans multiplié par le produit des paramètres des deux homofocales qui touchent la droite v.*

D'après 9° : *Lorsqu'un angle trièdre est conjugué à la surface S, le produit des paramètres des homofocales qui touchent ses faces, pris en signe contraire, est égal au produit des paramètres des trois homofocales qui passent par son sommet, multiplié par le carré*

du sinus de l'angle solide formé par des normales à ses faces.

D'après 14° : *Lorsqu'un tétraèdre est conjugué à la surface* S, *le produit des paramètres des homofocales qui touchent ses faces, pris en signe contraire, est égal au produit des carrés des demi-axes de la surface* S, *multiplié par la sixième puissance du sextuple de son volume, divisé par quatre fois le produit des carrés des aires de ses faces.*

D'après 25° : *Lorsqu'un tétraèdre est conjugué à la surface* S, *la somme des inverses des paramètres des homofocales qui touchent ses faces, prise en signe contraire, est égale à la somme des carrés des inverses des demi-axes de la surface* S.

D'après 30° : *Un tétraèdre étant conjugué à la surface* S, *si l'on désigne par* ρ_A, ρ_B, ρ_C, ρ_D *les paramètres des homofocales qui touchent ses faces* A, B, C, D, *et par* e *un point quelconque, la somme*

$$\frac{(e, A)^2}{\rho_A} + \frac{(e, B)^2}{\rho_B} + \frac{(e, C)^2}{\rho_C} + \frac{(e, D)^2}{\rho_D},$$

prise en signe contraire, est égale au produit des paramètres des trois homofocales qui passent au point e, *divisé par* π^2.

D'après 34° : *Un trièdre* d(A, B, C) *étant conjugué à la surface* S, *si par son sommet* d *on mène une droite arbitraire* ε, *et si l'on désigne par* ρ_A, ρ_B, ρ_C *les paramètres des homofocales qui touchent ses faces, la somme*

$$\frac{\sin^2 \varepsilon A}{\rho_A} + \frac{\sin^2 \varepsilon B}{\rho_B} + \frac{\sin^2 \varepsilon C}{\rho_C}$$

est égale et de signe contraire au produit des paramètres des deux homofocales qui touchent la droite ε,

divisé par le produit des paramètres des trois homofocales qui passent par le sommet d.

De ce théorème ou du précédent on peut conclure que, *si le point d est le sommet d'un cône circonscrit à la surface S, et d(ABC) un trièdre conjugué à cette surface, l'équation de ce cône sera, e étant un quelconque de ses points,*

$$\frac{(e, \mathrm{A})^2}{\rho_\mathrm{A}} + \frac{(e, \mathrm{B})^2}{\rho_\mathrm{B}} + \frac{(e, \mathrm{C})^2}{\rho_\mathrm{C}} = 0.$$

D'après 32° : *Si par le sommet d'un trièdre d(λμν), conjugué à la surface* S, *on mène un plan quelconque* E *et que l'on désigne par* ρ_E *le paramètre de l'homofocale qui touche ce plan,*

$$\rho_\mathrm{E} = \frac{\sin^2 \lambda \mathrm{E}}{\sin^2 \lambda \mathrm{A}} \rho_\mathrm{A} + \frac{\sin^2 \mu \mathrm{E}}{\sin^2 \mu \mathrm{B}} \rho_\mathrm{B} + \frac{\sin^2 \nu \mathrm{E}}{\sin^2 \nu \mathrm{C}} \rho_\mathrm{C},$$

$\rho_\mathrm{A}, \rho_\mathrm{B}, \rho_\mathrm{C}$ *étant les paramètres des homofocales qui touchent les plans* $\mu\nu$, $\nu\lambda$, $\lambda\mu$ ou A, B, C.

Lorsque le plan E touche la surface S, $\rho_\mathrm{E} = 0$.

D'après 36° : *Un dièdre* AB *étant conjugué à la surface* S, *si par son arête on mène un plan* E, *on a*

$$\sin^2 \mathrm{AB}\, \rho_\mathrm{E} = \sin^2 \mathrm{EB}\, \rho_\mathrm{A} + \sin^2 \mathrm{EA}\, \rho_\mathrm{B}.$$

D'après 37° : *Un angle* $\lambda\mu$ *étant conjugué à la surface* S, *si l'on mène par son sommet et dans son plan la droite* ε,

$$\sin^2 \lambda\mu\, \rho_\varepsilon = \sin^2 \varepsilon\mu\, \rho_\lambda + \sin^2 \varepsilon\lambda\, \rho_\mu,$$

en désignant par $\rho_\varepsilon, \rho_\lambda, \rho_\mu$ *les produits des paramètres des couples d'homofocales qui touchent les droites* $\varepsilon, \lambda, \mu$.

Théorème. — *Lorsqu'une droite touche deux homofocales de la surface* S, *son indice par rapport à* S *est constant* (54).

120. *Corollaires.* — Soit a un point de la surface S, A le plan tangent en ce point; par le point a menons une droite ε, et soit p le point où le diamètre parallèle à cette droite rencontre le plan A, on a (49)

$$I_\varepsilon = -\frac{1}{op^2}.$$

Si nous supposons que la droite ε touche les homofocales ρ et ρ' de S, on a aussi

$$I_\varepsilon = -\frac{\rho\rho'}{\pi^2}.$$

La comparaison de ces expressions conduit à ce théorème : *On donne trois surfaces homofocales* S, ρ *et* ρ'; *une droite* ε *touche les deux homofocales* ρ *et* ρ' *et coupe* S *au point* a, *si l'on mène le plan tangent de* S *au point* a *et que l'on projette le centre* o *sur le plan, par une parallèle à* ε, *le pied* p *de cette projection décrit une sphère dont le rayon a pour longueur* $\frac{\pi}{\sqrt{\rho\rho'}}$.

La surface S étant un ellipsoïde, ρ et ρ' les deux focales, on a

$$\rho = -\beta^2, \quad \rho' = -\gamma^2;$$

par conséquent le rayon de la sphère dont il vient d'être question a pour longueur $\frac{\pi}{\beta\gamma} = \alpha$, c'est-à-dire le demi-axe majeur de S.

121. Imaginons les cônes circonscrits aux homofocales ρ et ρ' qui ont pour sommets le point a de S; ces deux cônes ont quatre arêtes communes ε, donnant lieu chacune à l'égalité $I_\varepsilon = -\frac{1}{op^2}$. Il suit de là que les quatre diamètres op sont des arêtes d'un cône de révo-

lution qui a pour axe la perpendiculaire menée du centre sur le plan tangent A. Ainsi, *lorsque par un point a de la surface* S *on mène les quatre droites qui touchent à la fois deux homofocales de* S, *ces droites sont situées sur un cône de révolution qui a pour axe la normale de* S *au point a.*

122. Si l'on désigne par a et b les points d'intersection de la surface S avec la droite ε qui touche les deux homofocales ρ et ρ', et par ε_0 le demi-diamètre de S parallèle à ε, nous avons

$$I_\varepsilon = -\frac{\overline{ab}^2}{4\varepsilon_0^4} = -\frac{\rho\rho'}{\pi^2},$$

de sorte que la longueur de la corde ab a pour expression

$$ab = \frac{2\varepsilon_0^2}{\pi}\sqrt{\rho\rho'}.$$

Si ρ et ρ' sont les focales de l'ellipsoïde S,

$$ab = \frac{2\varepsilon_0^2}{\alpha}.$$

Théorème. — *Les plans qui touchent une homofocale de la surface* S *ont le même indice par rapport à* S (54).

123. *Corollaires.* — Soient a un point de la surface S, et A le plan tangent en ce point ; par le point a, menons un plan E touchant l'homofocale ρ de la surface S. D'après (54) et (52), on a

$$I_E = \frac{\rho}{\pi^2}, \quad I_E = -\frac{\overline{\sin EA}^2}{(o, A)^2} I_\varepsilon,$$

ε étant le diamètre de S, parallèle à la tangente AE. De

là résulte

$$\frac{\rho}{\pi^2} = -\frac{\sin^2 EA}{(o, A)^2} I_\epsilon.$$

Pour un autre plan E′ mené par le point a et touchant l'homofocale ρ, on aurait de même

$$\frac{\rho}{\pi^2} = -\frac{\sin^2 E'A}{(o, A)^2} I_{\epsilon'},$$

ϵ' étant le diamètre de S parallèle à la tangente AE′.

124. Ces relations donnent lieu à plusieurs théorèmes :

1° Si les deux plans E, E′ passent par la même tangente de S, $I_\epsilon = I_{\epsilon'}$, et par suite $\sin EA = \sin E'A$. *Si par une tangente de* S *on mène deux plans tangents à l'homofocale* ρ, *ces plans sont également inclinés sur le plan tangent de* S *mené par la tangente.*

2° Si les plans E, E′ passent par la normale au point a de S, on a $I_\epsilon = I_{\epsilon'}$, puisque les angles EA, E′A sont droits. Les diamètres ϵ, ϵ' de la section diamétrale parallèle au plan tangent A étant égaux sont également inclinés sur les axes de cette section. Or, les sections principales relatives au point a coupent le plan A suivant des parallèles à ces axes ; donc, *si par une normale de la surface* S *on mène deux plans tangents à l'homofocale* ρ *de cette surface, ces deux plans sont également inclinés sur les sections principales menées par cette normale.*

3° Si I_ϵ est constant quel que soit le plan E, l'angle EA est aussi constant ; le cône circonscrit à l'homofocale ρ et qui a pour sommet le point a est un cône de révolution. Or, pour que ϵ soit constant, il faut que le point a soit un ombilic de S. *Le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à une surface est donc*

le même que le lieu des ombilics, des homofocales de cette surface, c'est-à-dire les coniques focales de la surface donnée.

4° Supposons que le point a soit un point commun aux surfaces homofocales S et ρ, le plan tangent E de ρ en ce point étant normal à la surface S, on voit que *pour tous les points d'une ligne de courbure tracée sur la surface* S, $\frac{I_t}{(o, A)^2}$ *est constant.*

C'est le théorème de Joachimsthal, puisque $I_t = -\frac{1}{\varepsilon_0^2}$, ε_0 étant le demi-diamètre de la surface S, parallèle à l'élément de la ligne de courbure au point a.

125. D'après le n° 52 on a ce théorème : *Étant données deux homofocales* S *et* ρ, *si l'on mène un plan tangent à* ρ *et que l'on désigne par* E *le produit des demi-axes de la section faite dans* S, *par* E_0 *le produit des demi-axes de la section diamétrale parallèle à la section, le rapport* $\frac{E}{E_0^3}$ *est constant et égal à* $-\frac{\rho}{\pi^2}$.

En particulier, on voit que, si par le centre de S on mène des plans tangents au cône asymptote de l'homofocale ρ, ces plans déterminent dans S des coniques qui ont le produit de leurs axes constant.

126. D'après le corollaire du n° 81, lorsque trois plans A, B, C sont rectangulaires,

$$I_A + I_B + I_C = \frac{\overline{od}^2 - S_1^2}{\pi^2},$$

d étant le point d'intersection de ces trois plans, S_1^2 la somme des carrés des demi-axes de S. Or, si ces plans

touchent respectivement les homofocales ρ_A, ρ_B, ρ_C on aura

$$I_A = \frac{\rho_A}{\pi^2}, \quad I_B = \frac{\rho_B}{\pi^2}, \quad I_C = \frac{\rho_C}{\pi^2},$$

de sorte que

$$\rho_A + \rho_B + \rho_C = od^2 - S_1^2,$$

ce qui montre que le lieu du sommet d'un trièdre trirectangle, dont les faces touchent trois homofocales ρ_A, ρ_B, ρ_C de S, est une sphère dont le rayon od est donné par la relation

$$od^2 = \rho_A + \rho_B + \rho_C + S_1^2.$$

(*A suivre.*)

FACULTÉ DE PARIS.

QUESTION DE LICENCE (1872).

SOLUTION DE M. BOURGUET.

Étant donnés un cône circulaire droit dont l'axe est vertical, et dirigé de haut en bas, et une poulie homogène de masse et de rayon connus, située dans un plan méridien du cône et tournant autour d'un axe perpendiculaire à ce plan, un fil flexible et inextensible est enroulé sur la poulie; un des bras du fil passe dans une ouverture infiniment petite, pratiquée au sommet du cône, et à son extrémité est attaché un point pesant de masse m assujetti à glisser sans frottement sur la surface du cône; l'autre brin descend librement suivant la verticale et porte à son extrémité un point pesant de masse m'. Trouver le mouvement de ce système, en

supposant que la vitesse initiale du point m soit horizontale, et celle du point m' nulle. On néglige le poids du fil.

Je représente par

m la masse du corps qui glisse le long du cône ;

l sa distance au sommet ;

x la quantité dont il est descendu, à un moment quelconque ;

u sa vitesse horizontale ;

m' la masse de l'autre corps ;

μ la masse de la poulie.

Je suppose le centre de gravité de la poulie sur son axe.

Le principe des forces vives appliqué au système donne

$$(1)\qquad \begin{cases} \left(m + m' + \dfrac{\mu}{2}\right)\dfrac{dx^2}{dt^2} + m(u^2 - u_0^2) \\ \quad = 2gx(m\cos\alpha - m'), \end{cases}$$

et le principe des aires, appliqué au point m, donne

$$(2)\qquad (l + x)u = lu_0.$$

L'équation (1) devient, par substitution,

$$\left(m + m' + \frac{\mu}{2}\right)\frac{dx^2}{dt^2}$$
$$= \frac{x}{(l+x)^2}\left[2g(m\cos\alpha - m')(l+x)^2 + m(2l + x)u_0^2\right].$$

1° $m\cos\alpha - m' \geqq 0$.

x prend des valeurs positives de plus en plus grandes, le mobile m s'éloigne indéfiniment du sommet du cône.

2° $m\cos\alpha - m' < 0$.

$2gl^2(m\cos\alpha - m') + 2lmu_0^2 > 0$. Le trinôme du second degré a une racine positive x_0 et une racine négative. x varie de zéro à x_0 : le mouvement est oscillatoire, dans le sens vertical.

3° $2gl^2(m\cos\alpha - m') + 2lmu_0^2 = 0$.

$x = 0$, le mobile m décrit un parallèle.

4° $2gl^2(m\cos\alpha - m') + 2lmu_0^2 < 0$.

Le trinôme devient successivement négatif, positif, négatif, pour x égal à zéro, $-l$, $-2l$; il admet donc une racine négative, $-x_0 > -l$; x varie entre zéro et $-x_0$: le mouvement est oscillatoire.

Dans aucun cas m ne peut remonter jusqu'au sommet du cône.

Il est curieux de remarquer que la masse m, quelque petite qu'elle soit, et quelle que soit sa vitesse initiale, pourra faire remonter le mobile m' quelque grand qu'il soit : c'est comme pour le levier.

Pour une valeur quelconque de x, t s'obtient par une quadrature.

L'équation de la courbe sur la surface du cône, se ramène aussi à une quadrature.

QUESTIONS PROPOSÉES PAR M. BOURGUET

(voir 2e série, t. XV, p. 281);

SOLUTIONS DE M. LEZ.

Représentant par m et n les deux demi-cordes normales et perpendiculaires d'une conique; p^2, q^2 les produits des rayons vecteurs des pieds de ces normales; r, s les normales arrêtées à l'axe focal; r', s' les normales arrêtées à l'autre axe; t, u les rayons de courbure, démontrer les relations suivantes :

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2},$$

$$\frac{1}{mab} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{p^2}\right) = \frac{1}{pq^2},$$

$$\frac{1}{nab} = \frac{1}{q}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{q^2}\right) = \frac{1}{p^2 q},$$

$$\frac{p}{m} + \frac{q}{n} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a},$$

$$mp = nq = \frac{p^2 q^2}{ab}, \quad \frac{p}{t} + \frac{q}{u} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}, \quad mn = tu;$$

$$mr = ns, \quad mr' = ns', \quad \frac{r}{r'} = \frac{s}{s'},$$

$$\frac{r}{m} + \frac{s}{n} = 1 + \frac{b^2}{a^2}, \quad \frac{r'}{m} + \frac{s'}{n} = 1 + \frac{a^2}{b^2},$$

$$\frac{r+r'}{m} + \frac{s+s'}{n} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2.$$

(BOURGUET.)

Au point M (μ, ν) d'une ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$, la normale a pour équation $y - \nu = \frac{a^2 \nu}{b^2 \mu}(x - \mu)$; elle rencontre la courbe en M' ayant pour coordonnées

$$x' = \frac{[(a^2 - \mu^2)(a^2 - b^2)^2 - a^2 b^4]\mu}{a^6 + b^4 \mu^2 - a^4 \mu^2},$$

$$y' = \frac{[\mu^2 (a^2 - b^2)^2 - a^6]\nu}{a^6 + b^4 \mu^2 - a^4 \mu^2}.$$

Par suite, on trouve que, en fonction de l'abscisse μ, la corde normale MM' égale

$$(1) \qquad 2m = \frac{2b(a^4 + b^2 \mu^2 - a^2 \mu^2)^{\frac{3}{2}}}{a^6 + b^4 \mu^2 - a^4 \mu^2}.$$

La tangente au même point M a pour équation

$$(y - \nu) = -\frac{b^2 \mu}{a^2 \nu}(x - \mu);$$

elle coupe en deux points P, P' le cercle concentrique $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$, lieu du sommet d'un angle droit

circonscrit à l'ellipse. Ces points ont pour coordonnées

$$x = \frac{a^2 b^4 \mu \pm a^2 \nu \sqrt{a^6 \nu^2 + b^6 \mu^2}}{a^4 \nu^2 + b^4 \mu^2},$$

$$y = \frac{a^4 b^2 \nu \mp b^2 \mu \sqrt{a^6 \nu^2 + b^6 \mu^2}}{a^4 \nu^2 + b^4 \mu^2}.$$

La tangente à l'ellipse, menée par le point P, peut donc être représentée par

$$y - \frac{b^2(a^4\nu - \mu\sqrt{a^6\nu^2 + b^6\mu^2}}{a^4\nu^2 + b^4\mu^2} = \frac{a^2\nu}{a^2\mu}\left(x - \frac{a^2(b^4\mu + \nu\sqrt{a^6\nu^2 + b^6\mu^2}}{a^4\nu^2 + b^6\mu^2}\right),$$

ou plutôt par

$$b^2\mu y = a^2\nu x - \sqrt{a^6\nu^2 + b^6\mu^2};$$

elle touche la courbe au point N, dont l'abscisse γ est

$$\frac{a^4\nu}{\sqrt{a^6\nu^2 + b^6\mu^2}} = a^3\sqrt{\frac{a^2 - \mu^2}{a^6 + b^4\mu^2 - a^4\mu^2}},$$

en fonction de μ.

A l'aide de la formule (1), on a

$$NN' = 2n = \frac{2(a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2)^{\frac{3}{2}}}{a^2(a^6 + b^4\mu^2 - a^4\mu^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Maintenant on sait que le produit des rayons vecteurs

$$FM.F'M = a^2 - c^2\mu^2 = \frac{a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2}{a^2} = p^2;$$

de même

$$FN.F'N = a^2 - c^2\gamma^2 = \frac{a^2 b^2(a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2)}{a^6 + b^4\mu^2 - a^4\mu^2} = q^2.$$

Quant aux normales arrêtées à l'axe focal, elles sont

$$\text{en M,} \quad \frac{b}{a^2}(a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2)^{\frac{1}{2}} = r,$$

$$\text{en N,} \quad b^2\left(\frac{a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2}{a^6 + b^4\mu^2 - a^4\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}} = s;$$

les mêmes normales arrêtées à l'autre axe ont pour longueurs

$$\frac{1}{b}\left(a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2\right)^{\frac{1}{2}} = r',$$

$$a^2\left(\frac{a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2}{a^6 + b^4\mu^2 - a^4\mu^2}\right)^{\frac{1}{2}} = s'.$$

Enfin les rayons de courbure sont

$$\text{en M,}\quad \frac{\left(a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2\right)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b} = t,$$

$$\text{en N,}\quad a^2 b^2\left(\frac{a^4 + b^2\mu^2 - a^2\mu^2}{a^6 + b^4\mu^2 - a^4\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}} = u.$$

Cela posé, on peut écrire de suite, en fonction de p et de q,

$$m = \frac{pq^2}{ab},\qquad n = \frac{p^2q}{ab},$$

$$r = \frac{pb}{a},\qquad s = \frac{qb}{a},$$

$$r' = \frac{pa}{b},\qquad s' = \frac{qa}{b},$$

$$t = \frac{p^3}{ab},\qquad u = \frac{q^3}{ab}.$$

Remarquant que $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$, on retrouve facilement les relations énoncées plus haut, en combinant les huit expressions ci-dessus. Pour l'hyperbole, on obtient les mêmes résultats; du reste, il suffit de faire $b^2 = -b^2$.

QUESTIONS PROPOSÉES AU CONCOURS D'ADMISSIBILITÉ A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1876).

SOLUTIONS DE M. MORET-BLANC.

Première question. — *Expliquer la recherche du lieu des milieux des cordes parallèles à la droite qui joint l'origine au point dont les coordonnées sont* $x = 2, y = -1, z = 1$, *pour la surface représentée par l'équation*

$$(1) \qquad x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2xy + 5x + z = 0.$$

Nota. — **L'explication doit être faite sur les données numériques qui ont été indiquées et non avec des relations générales littérales.**

SOLUTION.

Les équations de la droite joignant l'origine au point $(x = 2, y = -1, z = 1)$ sont

$$(a) \qquad \begin{cases} x = 2z, \\ y = -z, \end{cases}$$

et celles d'une corde parallèle à cette droite sont

$$(2) \qquad \begin{cases} x = 2z + \alpha, \\ y = -z + \beta, \end{cases}$$

α et β étant des paramètres variables d'une corde à l'autre.

Les équations (1) et (2) déterminent les coordonnées des points d'intersection de la corde et de la surface.

En reportant dans l'équation (1) les valeurs de x et y

données par l'équation (2), on obtient l'équation

$$z^2 - (2\alpha + 11)z + \alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2 + 5\alpha = 0.$$

La coordonnée z du milieu de la corde est la demi-somme des racines de cette équation. On a donc

$$z = \alpha + 5,5,$$

puis

$$x = 3\alpha + 11,$$

$$y = \beta - \alpha - 5,5.$$

Telles sont les coordonnées du milieu de la corde définie par les valeurs α et β. Si donc on élimine α et β entre ces trois équations, ou simplement α entre les deux premières qui ne contiennent pas β, on aura la relation qui doit exister entre les coordonnées d'un point pour qu'il soit le milieu d'une corde parallèle à la droite donnée (a), c'est-à-dire l'équation du lieu des milieux de ces cordes, ce qui donne

$$x - 3z + 5,5 = 0,$$

équation du plan diamétral des cordes parallèles à la direction donnée.

Deuxième question. — *On demande de trouver les limites entre lesquelles doit varier le coefficient a pour que l'équation*

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + a = 0$$

ait ses quatre racines réelles.

On sait (théorème de Rolle) qu'entre deux racines réelles de l'équation proposée est comprise, au moins, une racine réelle de l'équation dérivée

$$12x^3 - 12x^2 - 24x = 0,$$

ou

$$x(x^2 - x - 2) = 0.$$

Les racines de celle-ci sont, par ordre de grandeur,

$$-1, 0, 2.$$

Il faut qu'en substituant à x, dans l'équation proposée, $-\infty$, -1, 0, 2, $+\infty$, on ait des résultats alternativement positifs et négatifs

Nombres substitués.	Résultats.
$-\infty$	$+\infty$
-1	$a-5$
0	$+a$
2	$a-32$
$+\infty$	$+\infty$

a doit donc être compris entre zéro et 5, les limites étant admissibles. Si $a=0$, l'équation a deux racines nulles; si $a=5$, deux racines sont égales à -1.

Nota. — Les quatre racines étant réelles, la plus petite est comprise entre -2 et -1, et la plus grande entre 2 et 3.

QUESTION PROPOSÉE AU CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (1876).

SOLUTION DE M. MORET-BLANC.

On considère une hyperbole équilatère fixe et une infinité de cercles concentriques à cette courbe. A chacun de ces cercles, on mène des tangentes qui soient en même temps normales à l'hyperbole. On prend le milieu de la distance qui sépare le point de contact du cercle variable du point d'incidence sur l'hyperbole fixe. On demande le lieu géométrique de ces milieux.

Si l'équation se présente sous une forme irrationnelle, on aura à la rendre rationnelle.

En second lieu, on exprimera en fonction du rayon du cercle les coordonnées du point d'incidence, en s'attachant à spécifier les solutions réelles distinctes.

Soit

$$x^2 - y^2 = a^2$$

l'équation de l'hyperbole équilatère rapportée à ses axes.

Les équations de la normale au point (x', y') et de la perpendiculaire abaissée du centre sur cette normale sont respectivement

$$y'x + x'y = 2x'y',$$
$$x'x - y'y = 0;$$

d'où l'on tire pour les coordonnées de leur point d'intersection, point de contact de la normale avec la circonférence tangente concentrique à l'hyperbole,

$$x_1 = \frac{2x'y'^2}{x'^2 + y'^2},$$
$$y_1 = \frac{2x'^2y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Le rayon du cercle, ou la distance du centre à la normale, est

$$\frac{2x'y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = r.$$

En appelant x et y les coordonnées du milieu de la distance du point de contact de la normale avec le cercle à son point d'incidence sur l'hyperbole, on a

$$2x = x' + \frac{2x'y'^2}{x'^2 + y'^2} = \frac{x'^3 + 3x'y'^2}{x'^2 + y'^2},$$
$$2y = y' + \frac{2x'^2y'}{x'^2 + y'^2} = \frac{3x'^2y' + y'^3}{x'^2 + y'^2}.$$

En combinant ces équations par addition et soustraction, on obtient le système équivalent

$$2(x+y)=\frac{(x'+y')^3}{x'^2+y'^2},$$

$$2(x-y)=\frac{(x'-y')^3}{x'^2+y'^2};$$

ou, en posant, pour abréger, $x'+y'=\alpha$, $x'-y'=\beta$,

$$x+y=\frac{\alpha^3}{\alpha^2+\beta^2},$$

$$x-y=\frac{\beta^3}{\alpha^2+\beta^2},$$

$$\alpha\beta=a^2.$$

On obtiendra l'équation du lieu demandé en éliminant α et β entre ces trois équations.

En multipliant membre à membre les deux premières, et ayant égard à la troisième, on a

$$x^2-y^2=\frac{\alpha^3\beta^3}{(\alpha^2+\beta^2)^2}=\frac{a^6}{(\alpha^2+\beta^2)^2},$$

d'où

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{a^3}{(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

équation qui peut remplacer la troisième. Les deux premières donnent ensuite

$$\alpha^2=a^2\frac{(x+y)^{\frac{1}{3}}}{(x-y)^{\frac{1}{3}}},$$

$$\beta^2=a^2\frac{(x-y)^{\frac{1}{3}}}{(x+y)^{\frac{1}{3}}};$$

d'où

$$\alpha^2+\beta^2=a^2\left[\frac{(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}}{(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}}\right].$$

En égalant les deux valeurs de $\alpha^2+\beta^2$, et multipliant par $(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ pour chasser les dénominateurs, il vient

$$(1)\qquad (x^2-y^2)^{\frac{1}{6}}\left[(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}\right]=a,$$

équation du lieu demandé, qu'il faut rendre rationnelle.

En élevant les deux membres au cube, il vient

$$(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\left\{2(x^2+y^2)+3(x^2-y^2)^{\frac{1}{3}}\left[(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}\right]\right\}=a^3,$$

et, en remplacant $(x+y)^{\frac{2}{3}}+(x-y)^{\frac{2}{3}}$ par sa valeur $\dfrac{a}{(x^2-y^2)^{\frac{1}{6}}}$,

$$(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\left[2(x^2+y^2)+3a(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\right]=a^3,$$

ou

$$(2)\qquad 2(x^2+y^2)(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}=a^3-3a(x^2-y^2),$$

et, en élevant au carré et transportant tous les termes dans le premier membre,

$$(3)\quad 4(x^2+y^2)^2(x^2-y^2)-9a^2(x^2-y^2)^2-6a^4(x^2-y^2)-a^6=0,$$

équation du sixième degré, qui, ne contenant que les puissances paires de x et de y, est réductible au troisième. Mais il faut remarquer que cette équation est plus générale que l'équation (2).

En effet, dans la relation

$$\alpha^2+\beta^2=\frac{a^3}{(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ est nécessairement positif, et, par suite, il en est de même de $(x^2-y^2)^{\frac{1}{6}}$ dans l'équation (1), et de $(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ dans l'équation (2). Or l'équation (3) comprend également le cas où $(x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ serait négatif.

En résolvant l'équation (3) par rapport à y^2, il ne faudra donc prendre que les valeurs pour lesquelles on a

$$a^3 - 3a(x^2 - y^2) > 0$$

ou

$$y^2 > x^2 - \frac{a^2}{3}.$$

D'ailleurs l'équation (3) montre que l'on doit avoir

$$y^2 < x^2.$$

On voit immédiatement que la courbe, symétrique par rapport aux axes de l'hyperbole, a deux sommets sur l'axe des x aux points $x = \pm \frac{a}{2}$, qu'elle est comprise entre l'hyperbole et ses asymptotes, dont elle s'approche indéfiniment, ce qui donne une idée assez nette de sa forme.

On peut aussi les construire au moyen de l'équation (2) transformée en coordonnées polaires, qui devient

$$2r^3\sqrt{\cos 2\theta} + 3ar^2\cos 2\theta - a^3 = 0.$$

On a vu que le rayon du cercle tangent à la normale au point (x', y') de l'hyperbole est

$$\frac{2x'y'}{\sqrt{x'^4 + y'^2}} = r.$$

On a d'ailleurs

$$x'^2 - y'^2 = a^2;$$

d'où l'on tire, en éliminant y'^2,

$$4x'^4 - (2r^2 + 4a^2)x'^2 + a^2r^2 = 0,$$

$$x'^2 = \frac{r^2 + 2a^2 \pm \sqrt{r^4 + 4a^4}}{4}$$

et

$$y'^2 = \frac{r^2 - 2a^2 \pm \sqrt{r^4 + 4a^4}}{4}.$$

Les signes inférieurs, donnant une valeur négative pour y'^2, doivent être rejetés ; on a donc, en se bornant aux solutions réelles,

$$x'^2 = \frac{r^2 + 2a^2 + \sqrt{r^4 + 4a^4}}{4},$$

$$y'^2 = \frac{r^2 - 2a^2 + \sqrt{r^4 + 4a^4}}{4}$$

ou

$$x' = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{r^2 + 2a^2 + \sqrt{r^4 + 4a^4}},$$

$$y' = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{r^2 - 2a^2 + \sqrt{r^4 + 4a^4}}.$$

On voit que, pour chaque valeur de r, il existe quatre points d'incidence de la normale, symétriques par rapport aux deux axes de l'hyperbole.

Ce résultat était évident *a priori;* car, le pied de la normale se déplaçant sur une branche de la courbe depuis le sommet jusqu'à l'infini, la distance du centre à la normale, ou le rayon du cercle tangent à cette normale, croît de zéro à l'infini, et, par suite de la symétrie par rapport aux deux axes, chaque cercle est touché par quatre normales à l'hyperbole, sauf le cercle de rayon nul.

Nota. — Autres solutions de MM. Tourettes; Gambey; A. Desboves, professeur de Mathématiques au collége de Pamiers; Édouard Guillet, soldat au 38e d'infanterie; Louis Goulin, élève au lycée Corneille à Rouen.

FORMATION D'UN CUBE ENTIER QUI SOIT ÉGAL A LA SOMME DE QUATRE CUBES ENTIERS;

PAR M. EUGÈNE REBOUT.

1. On a identiquement

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2a\\ +3b^2c+3c^2a+3c^2b+6abc.\end{aligned}\right.$$

En changeant successivement les signes de a, b, c et ajoutant membre à membre les identités qui en résultent, il vient

$$\begin{aligned}&(b+c-a)^3+(c+a-b)^3+(a+b-c)^3\\ &= a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3b^2c\\ &\quad+3b^2a+3b^2c+3c^2b-18abc\\ &=(a+b+c)^3-24abc;\end{aligned}$$

d'où

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}(a+b+c)^3=(b+c-a)^3+(c+a-b)^3\\ +(a+b-c)^3+24abc.\end{aligned}\right.$$

Et, si l'on donne à a, b, c des valeurs telles que $3abc$ soit un cube, on aura formé un cube $(a+b+c)^3$, égal à la somme de quatre autres cubes.

2. Par exemple, on a, pour $a=3$, $b=4$, $c=6$,

$$13^3 = 12^3+7^3+5^3+1^3$$

et, pour $a=18$, $b=20$, $c=25$,

$$63^3=60^3+27^3+23^3+13^3.$$

Si, dans cette dernière identité, on remplace 13^3 par la

somme des quatre cubes de l'exemple précédent, on aura

$$63^3 = 60^3 + 27^3 + 23^3 + 12^3 + 7^3 + 5^3 + 1^3.$$

3. Peut-être n'est-il pas inutile de faire remarquer que la somme des trois nombres $(b + c - a)$, $(c + a - b)$, $(a + b - c)$ est égale au nombre proposé $(a + b + c)$, et que $24abc$ est égal à trois fois le produit qu'on obtient en multipliant les sommes, deux à deux, de ces trois nombres.

CORRESPONDANCE.

Lettre de M. Lagout. — Monsieur, vous avez publié en tête de votre Revue (numéro d'octobre 1875) une critique de la Tachymétrie par M. Casimir Rey, critique dans laquelle sont citées plusieurs de mes publications étrangères aux sciences et même aux Mathématiques des candidats aux Écoles Polytechnique et Normale.

Par contre, le livre fondamental de ma méthode, appelé le *Cahier d'un soldat du Génie*, qui était à sa 4ᵉ édition, n'est même pas désigné.

Dans ma méthode, il y a le fonds qui renferme les principes nécessaires, et l'accessoire, tels que le langage conventionnel, les comparaisons, les procédés mécaniques, etc....

Mon contradicteur n'est pas philosophe, il ne connaît pas les devoirs du critique :

In necessariis unitas,
In dubiis libertas.

Il a cherché des imperfections dans l'accessoire d'un

livre d'essai (*), et n'a pas voulu s'occuper du principe nécessaire, ni dans le livre d'essai, ni dans le livre fondamental, qu'il a oublié de citer et négligé de lire.

Mais ce qu'il y a de plus étrange, c'est que, après cinq pages écrites du ton léger que voici :

« Ministres, évêques, généraux, recteurs, maires, conseillers généraux ou municipaux, M. Lagout *emploie* toutes les personnes ayant, non pas *autorité* en Géométrie, mais bien autorité par la loi, pour imposer aux écoles, aux régiments, aux colléges, *urbi* et *orbi* ses boîtes tachymétriques et son enseignement de la Géométrie en trois leçons. »

Après cinq pages, dis-je, écrites dans ce style, M. Casimir Rey croit qu'il vient de terminer un Mémoire pour l'Académie des Sciences, et il en tire le corollaire suivant sous forme d'antithèse que l'on aimera à retenir:

La Géométrie est la science qui apprend à raisonner juste, même sur des figures qui sont fausses ; tandis que la Tachymétrie est un art qui apprend à *raisonner faux*, même sur des figures qui sont justes. »

J'ai deux réponses sommaires à faire ici à M. Casimir Rey :

1re RÉPONSE :

Je *n'emploie* personne, je soumets respectueusement mon travail aux professeurs et aux ingénieurs qui ont *autorité* en Géométrie ; tels étaient :

1° Au Conseil académique de Clermont, en 1872, le Recteur, des Inspecteurs d'Académie, les deux professeurs de Mathématiques du lycée, appelés par le Rec-

(*) *Le Panorama de la Géométrie*, 4e édit. épuisée, qui, cependant, a donné lieu au remarquable Mémoire de M. Paget à l'Académie des Sciences morales et politiques, Mémoire inséré dans le *Prompt savoir*.

teur à la Commission du Conseil académique, laquelle a assisté à plusieurs conférences d'initiation et a constaté les résultats par un examen ;

2° Les Ingénieurs professeurs de l'école des Ponts et Chaussées ;

3° Le Directeur de l'École des maîtres mineurs d'Alais, Ingénieur en chef des Mines (sorti le premier de l'École Polytechnique) ;

4° Le Conseil de l'École des Mines, qui m'a admis à l'honneur d'exposer ma méthode aux élèves, en vue de l'instruction technique des maîtres mineurs.

Partout la méthode a été agréée et admise à être vulgarisée.

M. Rey a donc émis une assertion inexacte quant à l'autorité de mes juges.

Voici, par surcroît, une circulaire aux ingénieurs, appuyée sur des documents d'une grande autorité en Géométrie (*).

2e RÉPONSE :

Je crois que la dignité de la Revue savante s'oppose à ce qu'on y discute sur le ton choisi par M. Rey. Cette réserve faite, je suis prêt à soutenir une polémique contre mon contradicteur sur ce qu'il nomme les *faux raisonnements de la Tachymétrie.*

Ma réfutation paraîtra tardive ; j'ai attendu que plusieurs faits se fussent produits :

1° L'épuisement de la 4e édition de l'opuscule critiqué, le *Panorama de la Géométrie,* dont le texte scientifique sera conservé intact, mais dont les accessoires *indépendants* seront, grâce à M. Rey, refondus ou supprimés ;

(*) *Voir* p. 276.

2° Le *Cahier du soldat du Génie,* qui était à son quatrième tirage, est arrivé au neuvième;

3° Il est publié en anglais, par la maison *Collins* de Londres, sous le nom de *Livre fondamental de Tachymétrie,* et se vend trois fois plus cher qu'en France (nation pratique!);

4° Le traducteur anglais désire que l'*Algèbre-tachymétrique* en trois leçons paraisse en même temps à Londres qu'à Paris.

Circulaire du Ministre aux Ingénieurs des Ponts et Chaussées. — « Versailles, le 15 février 1877. Monsieur, M. Lagout, ingénieur des Ponts et Chaussées, est l'inventeur d'une nouvelle méthode dite *Tachymétrie* ou prompt mesurage, au moyen de laquelle le premier venu peut obtenir le cube des solides aussi vite que par les procédés usités jusqu'à présent dans la pratique.

» La Commission des inventions instituée à l'École des Ponts et Chaussées a été appelée à donner son avis sur le mérite du système de M. Lagout. Ce système se résume dans la décomposition effective des divers volumes à évaluer, suivie d'un groupement différent des parties ainsi obtenues, de manière à rendre intuitive la règle qu'un novice aurait peine à déduire de la longue suite des raisonnements en usage. M. Lagout, dit le Rapport de la Commission, démontre pour ainsi dire physiquement les propriétés du carré de l'hypoténuse et des triangles semblables; il fait l'application de sa méthode à la mesure du cercle et à celle de la sphère. Raisonnant sur le polyèdre dont la forme est celle d'un tas de cailloux destinés à l'empierrement des routes, il n'a pas de peine à mettre en évidence, par de simples déplacements de figure, l'inexactitude de la règle empirique qui con-

siste à multiplier la moyenne des bases par la hauteur; il déduit de là la correction à faire subir à cette mesure pour la rendre tout à fait rigoureuse.

» La Commission a donc reconnu que l'application du procédé de M. Lagout peut être fort utile pour mettre rapidement au courant de certaines règles de Géométrie les agents qui n'ont fait aucune étude, et elle a émis l'avis qu'il y avait intérêt à propager la méthode de cet ingénieur.

» J'ai appris en outre que, dans un grand nombre de villes et d'établissements publics, M. Lagout a fait des conférences de Tachymétrie; partout on a constaté les excellents résultats de son enseignement, particulièrement à l'École des maîtres mineurs d'Alais. M. le Directeur de l'école, ingénieur en chef des Mines, déclare que la nouvelle méthode a été très-appréciée du public admis aux conférences, et il la considère comme étant appelée à produire *une véritable révolution pédagogique* dans l'enseignement des Sciences exactes.

» En présence des appréciations qui précèdent, il m'a paru, Monsieur, qu'il convenait de divulguer le plus possible le procédé dont il s'agit parmi les agents inférieurs des Ponts et Chaussées. Pour parvenir à ce but, j'ai décidé qu'il serait envoyé à tous les ingénieurs en chef et d'arrondissement du service ordinaire les brochures de M. Lagout intitulées : *Le prompt savoir* et *Cahier d'un soldat du Génie,* avec le guidon métrique qui accompagne cette dernière. Dès que vous aurez reçu cet envoi, vous voudrez bien, avec le concours de MM. les ingénieurs ordinaires, prendre les mesures nécessaires pour initier autant que possible le personnel placé sous vos ordres à la connaissance de la Tachymétrie.

» Je vous prie de m'accuser réception de la présente

circulaire, dont j'adresse directement une ampliation à MM. les ingénieurs ordinaires.

» Recevez, Monsieur, l'assurance de ma considération très-distinguée.

Le Ministre des Travaux publics,
Signé : ALBERT CHRISTOPHLE.

Extrait d'une lettre de M. Desboves. — Comme je m'occupe en ce moment d'études de Géométrie ancienne, l'idée m'est venue de lire le *Traité des fluxions* de Maclaurin et j'ai été fort surpris de rencontrer, sous une forme équivalente, le théorème que j'avais communiqué à plusieurs personnes, comme étant de moi, dès les premiers jours d'octobre. Il ne peut donc plus dès lors y avoir aucune question de priorité relative au théorème en question.

Note. — La question 1221 (*voir* p. 235) a été résolue par MM. Moret-Blanc; Pisani; Klug, à Presbourg. La question du concours à l'École normale supérieure (p. 218), par M. Lez et M. Jules Chambon, élève au lycée de Bordeaux. La question 1223 (p. 236), par M. Henri Picart, du lycée de Grenoble.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

LA THÉORIE HUGODÉCIMALE, *ou la base scientifique et définitive* de l'*Arithmo-logistique universelle;* par le Comte *Léopold Hugo,* avec cette épigraphe : *Urbi et orbi. Hic tandem triumphaliter fulget regularitas! La pan-imaginarité hugomathique : continuitas! continuitas! tricontinuitas!* Brochure de 32 pages. Paris, en vente chez tous les libraires. 1877.

M. le Comte Léopold Hugo est, sans contredit, dans le domaine des sciences, l'un des plus actifs *novateurs* de

l'époque. On lui doit, maintenant, *onze* théories nouvelles (*voir* p. 7 de la présente brochure) :

Théorie élémentaire de l'Équidomoïde, ou Hugodomoïde préarchimédien ;

Théorie générale des cristalloïdes géométriques (Géométrie transformiste) ;

Théorie philosophique des stéréo-imaginaires, ou de l'évanescence géométrique ;

Théorie de la polygonisation des figures dans l'espace.

Théorie hugodécimale (Stupéfaction! on a peine à le croire!), etc., etc.

La théorie hugodécimale a principalement pour objet de faire connaître :

La base scientifique et définitive de l'arithmo-logistique universelle, découverte par l'auteur, en 1875, et annoncée en ces termes dans la Géométrie hugodomoïdale :

1. *La numération habituelle dans le monde civilisé sera désormais réputée avoir pour base mathématique le nombre des corps géométriques constituant le groupe de la sphère et des polyèdres réguliers.*

2. *Les polyèdres réguliers comprendront, à ce point de vue, les étoilés aussi bien que les convexes, ce qui donnera le nombre infranchissable et éternel de* DIX, *pour le groupe entier, y compris la sphère.*

Il était difficile de penser, a priori, *que l'utilisation théorique du groupe bizarre des réguliers géométriques fût si simple à déterminer, et pût se rattacher à une question aussi fondamentale que la base arithmo-logistique.*

Aujourd'hui, l'auteur se propose :

De travailler à vulgariser et à répandre dans les diverses régions civilisées de l'ancien et du nouveau monde... cette HAUTE *doctrine philosophique qui, dans*

sa concision, mérite assurément une place aux premiers rangs de la philosophie scientifique (p. 6).

L'avertissement contient, de plus (p. 9), une lettre adressée par M. Hugo à un Membre du Bureau des Longitudes, et dans laquelle on lit :

« Veuillez me permettre de vous offrir un certain nombre de mes Publications et Mémoires : sans entrer dans le détail, vous verrez, Monsieur, avec quelle hardiesse et quelle liberté philosophiques je *remanie les choses* et j'*agrandis la Science*, travail désintéressé et rôle souvent ingrat.

» D'ailleurs je me suis vu *contraint* de donner pleine carrière à toute mon originalité dans la forme ; ce n'est qu'à cette condition, je l'ai constaté, que j'ai pu attirer, dans notre pays *encore un peu engourdi scientifiquement*, quelque attention sur mes idées, mes anciens patrons de l'École des Mines, de la Monnaie (et de l'Architecture), Delaunay, Ebelmen, Senarmont, Pelouze, Neveu et les autres, ayant disparu depuis longtemps.... *Écrasons les pan-routiniers! qu'ils tremblent, blottis dans leur petite science, devant l'ouragan hugomathique!* »

Mon avis est qu'il ne faut écraser personne, et que les philosophes réformateurs doivent se garder de prendre l'exaltation des idées pour le sublime des idées. Ce n'est pas sans danger qu'on se lance dans la voie des réformes avec un enthousiasme qui, dans sa marche ascendante, pourrait s'élever jusqu'au délire. (G.)

Traité de Sténométrie, *ou Petit Essai de Géométrie pratique à l'usage des écoles primaires supérieures ; des écoles professionnelles ; des institutions de demoiselles ; des ateliers, etc.*, par *J.-P.-A. Bergeron*, docteur ès

sciences, ingénieur honoraire des États-Unis de Colombie, etc.

Nous avons lu avec beaucoup d'intérêt ce Traité de *Sténométrie* et nous le croyons appelé à un grand succès auprès des personnes qui s'occupent de Géométrie usuelle. On y trouve d'ingénieuses démonstrations, la plupart originales, simples, mises à la portée des commençants, et facilitant l'étude d'une Géométrie plus complète.

M. Bergeron a eu le soin de donner, dans un appendice complémentaire, la description et l'usage d'un instrument dû à M. le capitaine Peigné, et d'une grande utilité pour le levé des plans (*).

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1062

(voir 2ᵉ série, t. XI, p. 96);

PAR M. ESCARY.

Démontrer l'identité

$$[1-2(a+b+c+\ldots)x+(a+b+c+\ldots)(aA^2+bB^2+cC^2+\ldots)]^{-\frac{1}{2}}$$
$$=\sum\sum\sum\ldots\frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots 2^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}}$$
$$\times\frac{d^{\alpha+\beta+\gamma}(x^2-A^2)^\alpha(x^2-B^2)^\beta(x^2-C^2)^\gamma\ldots}{dx^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}},$$

(*) Cet instrument, nommé *alidade autoréductrice*, a pour objet de donner, par une simple lecture, la distance de deux points visibles ainsi que leur différence de niveau.

les sommations s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de α, β, γ, et $\alpha!$ étant supposé devenir égal à 1 quand $\alpha = 0$. (F. Didon.)

Si l'on considère l'équation du second degré

$$u = x + \frac{a}{2}(u^2 - A^2) + \frac{b}{2}(u^2 - B^2) + \frac{c}{2}(u^2 - C^2) + \ldots,$$

dont les racines sont

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2(a+b+c+\ldots)x + (a+b+c+\ldots)(aA^2 + bB^2 + cC^2 + \ldots)}}{a+b+c+\ldots},$$

on voit que le développement, par la formule de Lagrange, de la plus petite de ces racines, fournit la démonstration de l'identité qu'il s'agit d'établir; car on a successivement

$$[1 - 2(a+b+c+\ldots)x + (a+b+c+\ldots)(aA^2 + bB^2 + cC^2 + \ldots)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n\left[\frac{a}{2}(x^2 - A^2) + \frac{b}{2}(x^2 - B^2) + \frac{c}{2}(x^2 - C^2) + \ldots\right]^n}{dx^n}$$

$$= \sum\sum\sum\ldots \frac{a^\alpha b^\beta c^\gamma}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots 2^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}}$$

$$\times \frac{d^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}(x^2 - A^2)^\alpha (x^2 - B^2)^\beta (x^2 - C^2)^\gamma \ldots}{dx^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}},$$

en ayant égard à la valeur du développement d'une puissance entière d'un polynôme et observant que, pour $b = 0$, $c = 0$, ... et $A^2 = 1$, on doit retomber sur les fonctions X_n de Legendre, ce qui exige que les α, β, γ, ... soient les mêmes comme indices de différentiation et comme exposants.

Question 1222

(voir 2e série, t. XV, p. 144);

PAR M. ARMAND BERTRAND,
Propriétaire à Azillanet (Hérault).

On donne sur un plan un point A *et un cercle de rayon variable, mais dont le centre est fixe; on mène à ce cercle deux tangentes* AM_1, AM_2 *et la corde des contacts* M_1M_2. *A quelles valeurs du rayon variable correspond le maximum : 1° du périmètre du triangle* AM_1M_2; *2° de l'aire de ce triangle; 3° de la corde des contacts?* (HARKEMA.)

Posons, pour simplifier, $AM_1 = AM_2 = t$, $M_1O = r$, $M_1M_2 = 2m$, $AP = p$, $AO = 2K$.

1° *Maximum du périmètre* $2(t+m)$. — Nous pouvons considérer seulement le demi-périmètre $t+m$; les deux triangles AM_1O, AM_1P donnent

$$t = \sqrt{4K^2 - r^2}, \quad m = \frac{tr}{2K};$$

on a donc

$$t+m = \frac{\sqrt{4K^2 - r^2}(2K+r)}{2K} = \frac{(2K-r)^{\frac{1}{2}}(2K+r)^{\frac{3}{2}}}{2K}.$$

On voit facilement que la somme des facteurs est constante, et, par suite, que le maximum aura lieu pour la valeur de r satisfaisant à la relation

$$\frac{2K+r}{3} = \frac{2K-r}{1} = \frac{4K}{4},$$

d'où

$$r = K.$$

2° *Maximum de l'aire pm.* — Les deux triangles AM_1O, AM_1P donnent

$$p = \frac{t^2}{2K}, \quad m = \frac{tr}{2K};$$

on a donc

$$pm = \frac{t^3 r}{4K^2} = \frac{(t^2)^{\frac{3}{2}}(r^2)^{\frac{1}{2}}}{4K^2}.$$

Or le triangle AM_1O donne

$$(1) \qquad t^2 + r^2 = 4K^2 \text{(quantité constante)};$$

le maximum aura donc lieu pour la valeur de r satisfaisant à

$$\frac{t^2}{3} = \frac{r^2}{1} = \frac{4K^2}{4},$$

d'où

$$r = K.$$

3° *Maximum de la corde* $2m$. — Nous pouvons considérer seulement la demi-corde m; nous avons trouvé précédemment

$$m = \frac{tr}{2K} = \frac{(t^2 r^2)^{\frac{1}{2}}}{2K}.$$

La relation (1) nous montre que le maximum aura lieu pour $t^2 = r^2$, c'est-à-dire, en vertu de la même relation, pour $r^2 = 2K^2$ ou $r = K\sqrt{2}$.

Remarque. — On peut encore trouver ce dernier maximum par deux autres méthodes :

1° En posant $OP = q$, on a

$$m^2 = pq;$$

or, $p + q$ est constant et égal à $2K$: donc le maximum aura lieu pour $p = q = K = m$, et, par suite, pour $r = K\sqrt{2}$, en vertu de la relation

$$r^2 = m^2 + q^2,$$

donnée par le triangle M_1PO, qui devient

$$r^2 = 2K^2.$$

2° Les angles AM_1O, AM_2O étant droits, le lieu des points M_1, M_2 est la circonférence décrite sur AO comme diamètre; la corde M_1M_2 sera donc maximum quand elle sera précisément l'un des diamètres du lieu, et, par suite, lorsque le triangle M_1PO donnera la relation

$$r^2 = 2K^2,$$

et que l'on aura par conséquent

$$r = K\sqrt{2}.$$

Nota. — La même question a été résolue par MM. Pisani, professeur (Italie); Droz, ingénieur à Zurich; Lez; Sondat; E. Flanquembergue, maître répétiteur au lycée de Saint-Quentin; Cauboue, Berthomieu, Barthe, Dussoudeix, élèves au lycée de Bordeaux; Bertaux (Léon), élève à l'athénée de Mons (classe de M. Cambier); Rousselot, élève au lycée de Saint-Brieuc; Biette, élève au lycée du Havre; A. Venard, du lycée de Clermont; Tarraud (Gabriel), élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Châteauroux (classe de M. Escary); Henri Picat, du lycée de Grenoble; Georges Lambiotte.

M. Tarraud a donné les solutions des questions analogues, relatives à une sphère et au cône circonscrit.

Question 1226

(voir 2e série, t. XVI, p. 192);

PAR M. J. DE VIRIEU,
Professeur à Lyon.

ÉNONCÉ.

Rendre calculable par logarithmes

$$\sin x = \frac{\sin a + \sin b}{1 + \sin a \sin b}.$$

SOLUTION.

L'expression proposée donne

$$1 + \sin x = \frac{(1 + \sin a)(1 + \sin b)}{1 + \sin a \sin b},$$

$$1 - \sin x = \frac{(1 - \sin a)(1 - \sin b)}{1 + \sin a \sin b};$$

d'où

$$\frac{1+\sin x}{1-\sin x}=\left(\frac{1+\sin a}{1-\sin a}\right)\left(\frac{1+\sin b}{1-\sin b}\right),$$

$$\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{4}\varpi+\tfrac{1}{2}x\right)=\pm\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{4}\varpi+\tfrac{1}{2}a\right)\operatorname{tang}\left(\tfrac{1}{4}\varpi+\tfrac{1}{2}b\right).$$

Nota. — Autres solutions de MM. Jamet; Moret-Blanc; Auguste Morel; Gustave Choquet, maître répétiteur au lycée de Lille; Barthe; Dessoudeix; Berthomieu, élèves au lycée de Bordeaux; Ferdinando Pisani; Joseph Bardelli, à Milan; Sondat, à Annecy.

QUESTIONS.

1235. On donne une ellipse de centre O. Prenons un point m de cette courbe et appelons μ le centre de courbure de l'ellipse correspondant à m. Menons la droite μO et désignons par t le point où elle rencontre la tangente en m à l'ellipse. On demande :

1° Quel est le lieu décrit par t lorsque m parcourt l'ellipse;

2° De démontrer que la tangente en t à ce lieu rencontre $m\mu$ en un point r tel que $mr=\frac{m\mu}{2}$.

(Mannheim).

1236. On donne un tétraèdre ABCD et deux points E, F; on construit deux autres tétraèdres EABC, FABC. Les faces de FABC coupent les arêtes de EABC aux points G, H, I. On détermine sur ces mêmes arêtes trois autres points K, L, M tels, qu'on ait

$$\frac{EG}{EK}:\frac{AG}{AK}=\frac{EH}{EL}:\frac{BH}{BL}=\frac{EI}{EM}:\frac{CI}{CM}=\frac{1}{2}.$$

Prouver :

1° Que les quatre plans analogues à KLM passent par un même point;

2° Que ce point décrit un plan tangent au cône passant par les cinq droites EA, EB, ..., le long de la génératrice EF, lorsque les cinq points A, B, C, D, F décrivent arbitrairement ces mêmes droites.

(BOURGUET.)

1237. Ayant posé, pour abréger,

$$P = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 - \alpha + \beta + \gamma + \delta}{2},$$

$$Q = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \alpha - \beta + \gamma + \delta}{2},$$

$$R = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \alpha + \beta - \gamma + \delta}{2},$$

$$S = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \alpha + \beta + \gamma - \delta}{2},$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers donnés, on propose de décomposer, au moyen de formules directes, l'expression

$$P^2 + Q^2 + R^2 + S^2$$

en deux facteurs représentés, chacun, par une somme de quatre carrés entiers. (S. REALIS.)

1238. A chaque racine réelle k de l'équation à coefficients réels

$$y^3 + (4p + 1)y + 8q = 0,$$

correspond une racine appartenant à l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

et comprise entre $\frac{k-1}{2}$ et $\frac{k+1}{2}$.

(S. REALIS.)

1239. L'équation

$$x^3 - 6\alpha\beta x - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 0,$$

dans laquelle α et β sont des entiers quelconques qui n'annulent pas le dernier terme, n'a pas de racine entière. (S. Realis.)

1240. L'équation

$$x^3 - (\beta - \gamma)x + \alpha\gamma = 0,$$

dans laquelle α et γ sont des entiers plus grands que zéro, et β est un entier satisfaisant à la condition

$$\alpha^2 > \beta \geqq (\alpha - 1)^2,$$

ou bien à la condition

$$\alpha^2 < \beta \leqq (\alpha + 1)^2,$$

a au moins une racine réelle incommensurable.

(S. Realis.)

1241. Trouver l'enveloppe d'un plan passant par les extrémités de trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde. Montrer que ce lieu est le même que celui du centre de la section faite dans la surface par le plan variable. (Genty.)

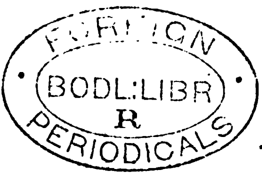
1242. On donne, dans un plan, un triangle, une conique circonscrite et une droite quelconque. On prend le milieu (toujours réel) de la droite, considérée comme corde de la conique, et les symétriques, par rapport à ce milieu, des trois points où la droite rencontre les côtés du triangle. Démontrer que les trois droites obtenues en joignant ces symétriques aux sommets opposés du triangle vont concourir sur la conique.

(J.-J.-A. Mathieu.)

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]



Surfaces homocycliques.

127. Soit $(a-\rho)x^2+(b-\rho)y^2+(c-\rho)z^2=1$ l'équation d'une famille de surfaces concentriques à la surface (S) $ax^2+by^2+cz^2=1$, et ayant les mêmes sections circulaires qu'elle. La constante ρ sera le paramètre de l'*homocyclique*. En suivant la marche adoptée pour les homofocales (54), nous établirons les trois relations suivantes :

L'indice du système des deux points e, e' par rapport à la surface S *est égal au paramètre de l'homocyclique conjuguée aux points e, e', multiplié par le produit des distances du centre o aux points e, e' et par les cosinus de l'angle eoe'*

$$I_{ee'}=\rho_1\, oe.oe' \cos eoe'.$$

L'indice du système des deux droites ε, ε' *par rapport à la surface* S *est égal au produit des paramètres des deux homocycliques conjuguées aux droites* ε, ε' *multiplié par le produit des distances du centre o aux deux droites et par le cosinus de l'angle des plans diamétraux* E, E' *menés par ces droites*

$$I_{\varepsilon\varepsilon'}=\rho_1\rho_2(o,\varepsilon)(o,\varepsilon')\cos EE'.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481, 529, et t. XVI, p. 5, 160, 193, 249.

L'indice du système des deux plans E, E' *par rapport à* S *est égal au produit des paramètres des trois homocycliques conjuguées aux deux plans, multiplié par le produit des distances du centre aux deux plans*

$$I_{EE'} = \rho_1 \rho_2 \rho_3 (o, E)(o, E').$$

128. Comme corollaires nous voyons que l'indice du point e par rapport à S est égal au paramètre de l'homocyclique qui passe au point e, multiplié par $\overline{oe}^2$; que l'indice de la droite ε par rapport à S est égal au produit des paramètres des homocycliques qui touchent la droite ε, multiplié par $(o, \varepsilon)^2$ et que l'indice du plan E est égal au produit des paramètres des trois homocycliques qui touchent le plan E, multiplié par $(o, E)^2$.

129. Théorème. — *Lorsque deux points e, e' sont conjugués à deux homocycliques, ils sont vus du centre commun o sous un angle droit et sont conjugués à toutes les homocycliques du système.*

Ce théorème résulte de la relation

$$I_{ee'} = \rho_1 oe . oe' \cos eoe';$$

il se démontre comme son correspondant (114).

On en déduit que, si un plan ou une droite touche deux homocycliques, les points de contact sont vus du centre sous un angle droit, et que si l'on prend les plans polaires d'un point m par rapport à toutes les homocycliques du système, tous ces plans passeront par une droite située dans le plan diamétral perpendiculaire à la droite om.

130. Des théorèmes énoncés au n° 85, nous pouvons déduire les suivants :

D'après 1°. Si l'on prend sur une droite γ deux points

a et b conjugués à la surface S, le produit des paramètres des homocycliques qui passent par ces points est égal au produit des paramètres des deux homocycliques qui touchent la droite γ, divisé par le carré du sinus de l'angle aob.

D'après 8°. Si l'on prend dans un plan D trois points a, b, c conjugués à la surface S, le produit des paramètres des homocycliques qui passent par ces points est égal au produit des paramètres des trois homocycliques qui touchent le plan D, divisé par le carré du sinus de l'angle solide déterminé par les diamètres oa, ob, oc.

D'après 12°. Lorsqu'un tétraèdre est conjugué à la surface S, le produit des paramètres des homocycliques qui passent par ses sommets, pris en signe contraire, est égal au carré du sextuple de son volume divisé par π^2 et par les carrés des distances du centre aux sommets du tétraèdre.

D'après 21°. Lorsqu'un tétraèdre est conjugué à la surface S, la somme des inverses des paramètres des homocycliques menées par les sommets du tétraèdre est égale à la somme des carrés des demi-axes de la surface S.

Théorème. — *Lorsqu'une droite* ε *touche deux homocycliques de la surface* S, *le rapport* $\frac{I_\varepsilon}{(o, \varepsilon)^2}$ *a une valeur constante, quelle que soit la droite* ε.

131. *Corollaires.* — Par la droite ε menons un plan tangent à S, et soit a le point de contact

$$I_\varepsilon = \frac{(a, \varepsilon)^2}{A^2},$$

A étant le produit des demi-axes de la section diamétrale

parallèle au plan tangent A. On a donc

$$\frac{I_\varepsilon}{(o, \varepsilon)^2} = \frac{(a, \varepsilon)^2}{(o, \varepsilon)^2} \cdot \frac{1}{A^2}.$$

Mais, si P est le plan mené par le point a parallèlement au plan diamétral mené par ε,

$$\frac{(a, \varepsilon)}{(o, \varepsilon)} = \frac{(o, P)}{(o, A)},$$

et comme

$$\pi = A.(o, A),$$

il en résulte

$$I_\varepsilon = \frac{(o, \varepsilon)^2 (o, P)^2}{\pi^2}.$$

Mais, d'autre part, si ρ et ρ' sont les paramètres des homocycliques qui touchent la droite ε,

$$I_\varepsilon = \rho . \rho' (o, \varepsilon)^2,$$

de sorte que

$$(o, P)^2 = \pi^2 . \rho . \rho'.$$

Ainsi le plan P est à une distance constante du centre.

Étant données trois surfaces homocycliques S, ρ *et* ρ', *si une droite* ε *touche les surfaces* ρ *et* ρ' *et que l'on mène par cette droite un plan tangent à* S, *le plan* P *mené par le point de contact parallèlement au plan diamétral qui passe par* ε *sera à une distance constante du centre* o.

132. Coupons les homocycliques ρ et ρ' par un plan A tangent à S, et soit a le point de contact. Les deux coniques d'intersection ont quatre tangentes communes, et nous venons de voir que, si par le point a on mène les quatre plans P parallèles aux plans diamétraux qui contiennent ces tangentes, ces plans seront à la même distance du centre. On peut donc dire aussi que, *si dans un*

plan tangent à la surface S *on mène les quatre droites qui touchent à la fois deux homocycliques de* S, *les plans diamétraux de cette surface conduits par ces tangentes toucheront une sphère qui a son centre au point de contact du plan tangent.*

THÉORÈME. — *Lorsqu'un point e est situé sur une homocyclique de la surface* S, *le rapport* $\frac{I_e}{\overline{oe}^2}$ *a une valeur constante.*

133. *Corollaires.* — Soit A un plan qui touche au point *a* la surface S; ce plan coupe l'homocyclique ρ de S suivant une conique, et si l'on appelle *e* un point de cette conique,

$$\rho = \frac{I_e}{\overline{oe}^2}, \quad I_e = \frac{\overline{ae}^2}{\varepsilon^2},$$

ε étant le demi-diamètre de S parallèle à la tangente *ae*. De ces deux relations résulte

$$\rho = \frac{\overline{ae}^2}{\varepsilon^2 . \overline{oe}^2} = \frac{\overline{\sin}^2 aoe}{\varepsilon^2 \overline{\sin}^2 oae};$$

pour un autre point e' de la section, on aurait pareillement

$$\rho = \frac{\overline{\sin}^2 aoe'}{\varepsilon'^2 \overline{\sin}^2 oae'}.$$

Voici quelques conséquences de ces égalités :

1° Si les trois points *e*, *a*, e' sont en ligne droite, $\varepsilon = \varepsilon'$; comme d'ailleurs les angles en *a* sont tous égaux, $\overline{\sin}^2 aoe = \overline{\sin}^2 aoe'$.

Si l'on mène une tangente à la surface S, *rencontrant aux points e, e' une homocyclique de cette sur-*

face, le diamètre mené au point de contact divise également l'angle eoe'.

2° Si le plan eoe' est perpendiculaire sur oa, $\varepsilon \sin oae = \varepsilon' \sin oae'$; par conséquent les plans oae, oae' déterminent dans S des sections de même aire.

3° Menons un plan tangent commun aux deux surfaces S et ρ ; soient a le point de contact sur la première, e le point de contact sur la seconde. Si l'on désigne par ε le demi-diamètre de S parallèle à la tangente ae, on a $\rho = \frac{1}{\varepsilon^2 \sin^2 oae}$, puisque l'angle aoe est droit (129). *Étant données deux surfaces homocycliques* S *et* ρ, *si l'on mène un plan tangent à ces deux surfaces et que a et e soient les points de contact, en désignant par* ε *le demi-diamètre parallèle à la tangente ae, le produit* $\varepsilon \sin oae$ *est constant.*

4° Puisque $\frac{\overline{ae}^2}{\varepsilon^2 \overline{oe}^2} = \rho$ est constant pour tous les points e d'une homocyclique de S, si l'on prend le point e à l'infini, on a

$$\rho = \frac{1}{\varepsilon^2};$$

par conséquent, *si l'on considère une surface* S *et un hyperboloïde homocyclique de* S, *les arêtes du cône asymptote de cette surface déterminent dans* S *des diamètres de même longueur.*

134. Considérons trois points e, f, g situés respectivement sur les homocycliques ρ, ρ', ρ'' de la surface S, et tel que le trièdre $oefg$ soit trirectangle en o. Nous avons (54) et (11)

$$\rho = \frac{\mathrm{I}_e}{\overline{oe}^2} = -\mathrm{I}_2 - \frac{1}{\overline{oe}^2},$$

ε désignant le diamètre oe. On a des expressions analogues pour ρ' et ρ'', de sorte que

$$\rho + \rho' + \rho'' = -\Sigma I_\varepsilon - \sum \frac{1}{\overline{oe}^2}.$$

Or (83)

$$\Sigma I_\varepsilon = -\frac{1}{S^2}, \quad \sum \frac{1}{\overline{oe}^2} = \frac{1}{p^2},$$

p étant la distance du centre o au plan efg. De là résulte

$$\rho + \rho' + \rho'' = \frac{1}{S^2} - \frac{1}{p^2}.$$

La distance p étant constante, nous voyons que, si l'on fait varier les points e, f, g, le plan conduit par ces trois points roulera sur une sphère dont nous avons le rayon.

Rayon de courbure.

135. Sur la courbe d'intersection de la surface S par un plan D, prenons trois points a, b, c, la relation 3° du n° 28 nous donne

$$\frac{\overline{ab}^2 . \overline{bc}^2 . \overline{ca}^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} = -16\overline{abc}^2 I_D,$$

α, β, γ étant les demi-diamètres de la surface, parallèles aux cordes bc, ca, ab. Si R est le rayon du cercle circonscrit au triangle abc,

$$ab . bc . ca = 4R\, abc,$$

d'où

$$I_D = -\frac{R^2}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}.$$

Supposons maintenant que les points b et c se rapprochent indéfiniment du point a, on aura

$$(1) \qquad I_D = -\frac{R^2}{\alpha^6};$$

R est alors le rayon de courbure au point a de la section faite par le plan D, et α le demi-diamètre de la surface parallèle à la tangente au point a de cette section.

D'autre part, si A est le plan tangent de la surface S au point a, on a aussi (53)

$$I_D = -\frac{\overline{\sin}^2 DA}{\alpha^2 (o, A)^2}.$$

En égalant ces deux expressions de I_D, on obtient, après avoir extrait la racine carrée,

$$(2) \qquad R = \frac{\alpha^2 \sin DA}{(o, A)}$$

pour l'expression du rayon de courbure au point a de la section oblique faite par le plan D.

L'élimination de α entre les expressions (1) et (2) donne encore

$$(3) \qquad I_D = -\frac{\overline{\sin}^3 DA}{R (o, A)^3}.$$

Les égalités (1) et (3) montrent que toute relation entre des indices de plans donne lieu à une relation correspondante entre des rayons de courbure; en voici quelques exemples :

136 (a). Par une droite λ coupant la surface S au point m, menons deux plans A, B conjugués à S et un plan quelconque E, on a (85, 36°)

$$\overline{\sin}^2 AB . I_E = \overline{\sin}^2 BE . I_A + \overline{\sin}^2 AE . I_B.$$

Si donc R_E, R_A, R_B désignent les rayons de courbure au point m des sections E, A, B, et si M est le plan tangent au point m, la relation (3) nous donne

$$\frac{\overline{\sin}^2 AB \, \overline{\sin}^3 ME}{R_E} = \frac{\overline{\sin}^2 BE \, \overline{\sin}^3 MA}{R_A} + \frac{\overline{\sin}^2 AE \, \overline{\sin}^3 MB}{R_B}.$$

Si la droite λ est normale à la surface S,

$$\frac{\overline{\sin}^2 AB}{R_E} = \frac{\overline{\sin}^2 BE}{R_A} + \frac{\overline{\sin}^2 AE}{R_B},$$

Lorsqu'en même temps les plans A et B sont rectangulaires,

$$\frac{1}{R_E} = \frac{\overline{\sin}^2 BE}{R_A} + \frac{\overline{\sin}^2 AE}{R_B}:$$

c'est le théorème d'Euler; R_A et R_B sont les rayons de courbure principaux.

(*b*) Les plans A et B étant conjugués à la surface S, on a aussi (85, 5°)

$$I_A I_B = -\frac{\overline{\sin}^2 AB}{\pi^2} I_\lambda = \frac{\overline{\sin}^2 AB}{\pi^2 (o, M)^2 \sin^2(\lambda, M)^2},$$

en se rappelant que $I_\lambda = -\frac{1}{(o, M)^2 \sin^2(\lambda, M)}$; par conséquent cette relation devient

$$\frac{\overline{\sin}^3 MA \, \overline{\sin}^3 MB}{R_A R_B} = \frac{\overline{\sin}^2 AB}{\sin^2 \lambda M} \frac{(o, M)^4}{\pi^2}.$$

Lorsque la droite λ est normale à la surface S et que de plus les plans A et B sont rectangulaires, on trouve pour le produit des rayons de courbure principaux au point *m*

$$R_A R_B = \frac{\pi^2}{(o, M)^4}.$$

(*c*) Par le point *m* de la surface S, menons trois plans rectangulaires entre eux, A, B, C, on a (82)

$$I_A + I_B + I_C = \frac{\overline{om}^2 - S_1^2}{\pi^2},$$

et, par conséquent, M étant le plan tangent au point m,

$$\frac{\overline{\sin}^3 MA}{R_A} + \frac{\overline{\sin}^3 MB}{R_B} + \frac{\overline{\sin}^3 MC}{R_C} = (o, M)^3 \frac{S_1^2 - \overline{om}^2}{\pi^2}.$$

Si le plan C est fixe, on déduit de là que, *si par une droite fixe on mène deux plans rectangulaires* A *et* B, *la somme*

$$\frac{\overline{\sin}^3 MA}{R_A} + \frac{\overline{\sin}^3 MB}{R_B}$$

est constante quels que soient ces deux plans.

Lorsque le plan C se confond avec le plan tangent M,

$$\frac{1}{R_A} + \frac{1}{R_B} = (o, M)^3 \frac{S_1^2 - \overline{om}^2}{\pi^2},$$

de sorte que, si A et B sont les sections principales, et en ayant égard à la valeur du produit $R_A R_B$ des rayons de courbure principaux, on trouvera, pour la somme de ces deux rayons,

$$R_A + R_B = \frac{S_1^2 - \overline{om}^2}{(o, M)}.$$

137. Puisque l'indice d'un plan par rapport à S peut s'exprimer à l'aide du paramètre de l'homofocale de S qui touche ce plan, le rayon de courbure en un point de la section de cette surface par un plan D pourra s'exprimer à l'aide du paramètre de l'homofocale de S qui touche le plan D. Ainsi la relation employée ci-dessus peut s'écrire

$$\frac{\overline{\sin}^2 ABI_E}{I_A I_B} = \frac{\overline{\sin}^2 AE}{I_A} + \frac{\overline{\sin}^2 BE}{I_B}.$$

Remplaçons le produit $I_A I_B$ par la valeur

$$\frac{\overline{\sin}^2 AB}{\pi^2 (o, M)^2 \overline{\sin}^2 \lambda M},$$

I_A par $\frac{\rho_A}{\pi^2}$, I_B par $\frac{\rho_B}{\pi^2}$, en désignant par ρ_A, ρ_B les paramètres des homofocales de S qui touchent les plans A et B, et enfin I_E par $-\frac{\sin^3 ME}{R_E(o, M)^3}$, nous aurons

$$-\frac{\overline{\sin}^3 ME}{R_E \sin^2\lambda M} = (o, M)\left(\frac{\overline{\sin}^2 EA}{\rho_A} + \frac{\overline{\sin}^2 EB}{\rho_B}\right).$$

Lorsque les plans A et B sont les sections principales relatives au point m,

$$-\frac{1}{R_E} = (o, M)\left(\frac{\overline{\sin}^2 EA}{\rho_A} + \frac{\overline{\sin}^2 EB}{\rho_B}\right),$$

de sorte que les rayons de courbure principaux relatifs au point m ont pour valeurs

$$R_A = -\frac{\rho_A}{(o, M)}, \quad R_B = -\frac{\rho_B}{(o, M)}.$$

Or, si l'on a égard à l'expression donnée (118) pour la distance d'un plan tangent à une homofocale de S au pôle de ce plan par rapport à S, on verra que *les centres de courbure principaux relatifs au point m de la surface* S *sont les pôles du plan tangent* M *en ce point par rapport aux deux homofocales de* S *qui passent par le point m.*

Lignes géodésiques.

138. Appelons a et b deux points de la surface S, A et B les plans tangents en ces points. Si nous prenons sur l'intersection δ de ces plans un point c, tel que les droites ac, bc soient également inclinées sur cette intersection, le chemin acb sera le plus court pour aller de a en b en traversant les deux plans. Soient E le plan acb,

λ et μ les demi-diamètres de la surface S, parallèles aux tangentes *ac* et *bc*; nous avons (53)

$$I_E = -\frac{\overline{\sin}^2 EA}{\lambda^2(o, A)^2} = -\frac{\overline{\sin}^2 EB}{\mu^2(o, B)^2}.$$

Les droites *ca*, *cb* déterminant un cône droit dont l'axe est la droite δ, le plan E est également incliné sur les plans A et B qui passent par l'axe.

Si l'on suppose que les points *a* et *b* se rapprochent indéfiniment, les lignes *ac* et *cb* deviennent deux éléments consécutifs de la ligne géodésique tracée sur la surface S par les points *a* et *b*, le plan *abc* est le plan osculateur de la géodésique au point *a*; en même temps les angles EA, EB, qui n'ont pas cessé d'être égaux, deviennent droits. Ainsi *le plan osculateur* E *d'une ligne géodésique tracée sur la surface* S *par le point a est normal à la surface en ce point, et son indice* (*par rapport à* S) *a pour valeur*

$$I_E = -\frac{1}{\lambda^2(o, A)^2} = -\frac{1}{\mu^2(o, B)^2},$$

λ *étant le demi-diamètre de la surface* S *parallèle à l'élément de la géodésique au point a*, A *le plan tangent de* S *en ce point*, μ *le demi-diamètre parallèle à l'élément consécutif*, B *le plan tangent à l'extrémité de cet élément.*

Il suit de là que l'indice du plan osculateur a la même valeur en tous les points d'une même géodésique.

139. *Si l'on considère sur la surface* S *toutes les géodésiques tangentes à une même ligne de courbure, les plans osculateurs de ces géodésiques ont le même indice par rapport à* S; *ces plans touchent une même homofocale de la surface* S.

Soit ab l'élément commun à la ligne de courbure et à la géodésique qui touche cette ligne de courbure; le plan osculateur de la géodésique au point a, étant normal à S, est déterminé par ab et la normale au point a; ce plan touche par conséquent l'homofocale ρ, qui, par son intersection avec S, donne la ligne de courbure considérée. Ainsi au point a l'indice du plan osculateur de la géodésique a pour valeur $\frac{\rho}{\pi^2}$ (54) : il a donc la même valeur pour toutes les géodésiques tangentes à la ligne de courbure, et par suite ils touchent tous l'homofocale ρ.

140. *Toutes les tangentes à une géodésique tracée sur la surface* S *touchent une homofocale de* S, *et cette homofocale est la même pour toutes les géodésiques qui touchent la même ligne de courbure.*

Car a et b étant deux points pris sur la géodésique, les plans osculateurs en ces points touchent une homofocale ρ de S. Lorsque les points a et b sont consécutifs, l'intersection des plans osculateurs devient la tangente à la géodésique, et cette intersection touche la surface ρ.

141. Considérons en particulier les géodésiques qui passent par un ombilic de la surface S (dont les demi-axes sont α, β, γ).

La distance (o, A) du centre au plan tangent en un ombilic étant égale à $\frac{\alpha\gamma}{\beta}$, le demi-diamètre λ étant égal à β, nous voyons que l'indice d'un plan osculateur E d'une géodésique passant par un ombilic a pour valeur

$$I_E = -\frac{1}{\alpha^2\gamma^2};$$

mais, si ρ est le paramètre de l'homofocale qui touche le plan E, on a aussi $I_E = \frac{\rho}{\pi^2}$. En égalant ces deux expressions de I_E, il en résulte $\rho = -\beta^2$, de sorte que les plans osculateurs des géodésiques qui passent par les ombilics touchent l'homofocale

$$\frac{x^2}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2 - \beta^2} = 1 :$$

c'est l'hyperbole focale. Les tangentes à toutes ces géodésiques doivent donc couper cette hyperbole.

142. Nous avons vu (**119**) qu'un angle $\lambda\mu$ étant conjugué à la surface S, si l'on mène par son sommet et dans son plan la droite ε,

$$\sin^2\lambda\mu\rho_\varepsilon = \sin^2\varepsilon\mu\rho_\lambda + \sin^2\varepsilon\lambda\rho_\mu,$$

en désignant par ρ_ε, ρ_λ, ρ_μ les produits des paramètres des couples d'homofocales qui touchent les droites ε, λ, μ.

Considérons le cas particulier dans lequel les droites λ, μ touchent deux lignes de courbure de la surface S et la droite ε, une géodésique tracée par le point $\lambda\mu$. Les droites ε, λ, μ touchent la surface S, l'angle $\lambda\mu$ est droit, et, si l'on appelle i l'angle, $\varepsilon\mu$, ε, λ, μ les demi-axes majeurs des secondes homofocales qui touchent les droites ε, λ, μ, on a

$$\varepsilon^2 - \alpha^2 = \sin^2 i\,(\lambda^2 - \alpha^2) + \cos^2 i\,(\mu^2 - \alpha^2)$$

ou

$$\varepsilon^2 = \lambda^2 \sin^2 i + \mu^2 \cos^2 i :$$

c'est l'équation connue des lignes géodésiques.

(*A suivre.*)

DÉMONSTRATION ANALYTIQUE DE QUELQUES PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES SURFACES DU SECOND ORDRE ;

PAR M. V. HIOUX,
Professeur au lycée de Rennes.

Le troisième paragraphe du Mémoire sur l'homographie (*Aperçu historique*) est intitulé ainsi :

Lieu géométrique du point de rencontre de trois plans tangents à une surface du second degré, assujettis à certaine condition.

Nous démontrerons d'abord le théorème suivant, qui est le deuxième du paragraphe :

Si l'on a dans l'espace une surface du second degré et une conique, et que, par trois droites prises dans le plan de cette courbe, de manière que le pôle de chacune d'elles, par rapport à la courbe, soit le point de concours des deux autres, on mène trois plans tangents à la surface; leur point d'intersection aura pour lieu géométrique une surface du second degré, passant par la conique, et telle, que le cône qui lui serait circonscrit suivant cette courbe aurait pour sommet le pôle du plan de cette courbe, pris par rapport à la surface proposée.

Prenons pour surface du second ordre un ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués dont l'un Oz soit conjugué du plan P de la conique C. L'ellipsoïde a pour équation

$$E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

et la conique C sera représentée par les deux équations

$$P = z - d = 0,$$

$$C = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + 1 = 0.$$

Dans le plan P, considérons trois droites l, l', l'' définies par les couples d'équations

$$(l)\qquad \begin{cases} z-d=0, \\ mx+ny+p=0; \end{cases}$$

$$(l')\qquad \begin{cases} z-d=0, \\ m'x+n'y+p'=0; \end{cases}$$

$$(l'')\qquad \begin{cases} z-d=0, \\ m''x+n''y+p''=0. \end{cases}$$

Enfin appelons $M(\alpha, \beta, \gamma)$ le point de rencontre de trois plans tangents à l'ellipsoïde passant par l, l' et l''.

Un plan défini par le point M et la droite l a pour équation

$$m(\gamma-d)x+n(\gamma-d)y-(m\alpha+n\beta+p)z \\ +d(m\alpha+n\beta)+p\gamma=0.$$

Un plan tangent à l'ellipsoïde au point x', y', z' a pour équation

$$\frac{x'}{a^2}x+\frac{y'}{b^2}y+\frac{z'}{c^2}z-1=0.$$

Pour que ces deux plans coïncident, il faut que l'on ait

$$\frac{x'}{a^2m(\gamma-d)}=\frac{y'}{b^2n(\gamma-d)}=-\frac{z'}{c^2(m\alpha+n\beta+p)} \\ =-\frac{1}{[d(m\alpha+y\beta)+p\gamma]};$$

et, comme le point x', y', z' est dans le premier plan, on a en outre

$$m(\gamma-d)x'+n(\gamma-d)y'-(m\alpha+n\beta+p)z' \\ +[d(m\alpha+n\beta)+p\gamma]=0.$$

L'élimination de x', y' et z' entre ces quatre équations

donne la condition de tangence, savoir

$$\begin{aligned}[a^2(\gamma - d)^2 + (c^2 - d^2)\alpha^2]m^2 \\ + [b^2(\gamma - d)^2 + (c^2 - d^2)\beta^2]n^2 \\ + (c^2 - \gamma^2)p^2 + 2(c^2 - d^2)\alpha\beta mn \\ + 2\alpha(c^2 - d\gamma)mp + 2\beta(c^2 - d\gamma)np = 0.\end{aligned}$$

On trouvera deux relations analogues en considérant les deux plans tangents passant par l' et l''. Ces trois relations peuvent s'écrire

$$\begin{aligned}Lm^2 + Mn^2 + Np^2 + 2Pmn + 2Qmp + 2Rnp &= 0,\\ Lm'^2 + Mn'^2 + Np'^2 + 2Pm'n' + 2Qm'p' + 2Rn'p' &= 0,\\ Lm''^2 + Mn''^2 + Np''^2 + 2Pm''n'' + 2Qm''p'' + 2Rn''p'' &= 0.\end{aligned}$$

Cela posé, puisque les trois droites l, l', l'' forment un triangle conjugué par rapport à la conique C, on a, pour une infinité de systèmes de valeurs de m, n, p, ..., l'identité

$$\begin{aligned}\mu(mx + ny + p)^2 \\ + \mu'(m'x + n'y + p')^2 + \mu''(m''x + n''y + p'')^2 \\ = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + 1,\end{aligned}$$

qui conduit aux six relations suivantes :

$$\begin{aligned}\mu m^2 + \mu' m'^2 + \mu'' m''^2 &= A,\\ \mu n^2 + \mu' n'^2 + \mu'' n''^2 &= C,\\ \mu p^2 + \mu' p'^2 + \mu'' p''^2 &= 1,\\ \mu mn + \mu' m'n' + \mu'' m''n'' &= B,\\ \mu mp + \mu' m'p' + \mu'' m''p'' &= D,\\ \mu np + \mu' n'p' + \mu'' n''p'' &= E.\end{aligned}$$

Si l'on ajoute les trois équations précédentes, après les avoir multipliées respectivement par μ, μ' et μ'', on trouve l'équation

$$AL + CM + N + 2BP + 2DQ + 2ER = 0.$$

Cette équation est du second degré en α, β, γ, et représente, par conséquent, une surface du second ordre Σ.

En remplaçant α, β, γ par x, y, z, et L, M, N, ... par les quantités correspondantes, cette équation peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned}\Sigma = \mathrm{A}(c^2 - d^2)x^2 &+ \mathrm{C}(c^2 - d^2)y^2 \\ &+ (\mathrm{A}a^2 + \mathrm{C}b^2)(z - d)^2 \\ &+ c^2 - z^2 + 2\mathrm{B}(c^2 - d^2)xy \\ &+ 2\mathrm{D}x(c^2 - dz) + 2\mathrm{E}y(c^2 - dz) = 0.\end{aligned}$$

La surface Σ passe par la conique donnée C, car si dans cette équation on fait $z = d$, on a

$$(c^2 - d^2)(\mathrm{A}x^2 + 2\mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + 2\mathrm{D}x + 2\mathrm{E}y + 1) = 0,$$

et si le facteur $c^2 - d^2$ est différent de zéro, on retrouve, en annulant l'autre facteur, l'équation dans son plan de la conique donnée.

Soit S $\left(x = 0,\ y = 0,\ z = \dfrac{c^2}{d}\right)$ le pôle du plan P par rapport à l'ellipsoïde. On trouve aisément que le plan polaire de S par rapport à Σ a pour équation

$$\left[(\mathrm{A}a^2 + \mathrm{C}b^2 - 1)\frac{c^2}{d} - d(\mathrm{A}a^2 + \mathrm{C}b^2)\right](z - d) = 0,$$

ou

$$z - d = 0.$$

Donc le plan P a même pôle par rapport à E et à Σ, ce qui revient à dire que le cône de sommet S est circonscrit à Σ suivant la conique donnée.

Les trois parties du théorème sont ainsi démontrées.

Corollaire. — Supposons $d = c$, alors le plan donné est tangent à l'ellipsoïde proposé. L'équation de Σ de-

vient

$$(z-c)[(Aa^2+Cb^2+1)(z+c)+2c(Dx+Ey)]=0.$$

Le lieu se compose du plan P lui-même et d'un deuxième plan passant par le diamètre d'intersection des deux plans

$$z+c=0, \quad Dx+Ey=0.$$

On a donc ce théorème :

Étant données une surface du second degré et une conique située dans un plan tangent à la surface : si par les trois côtés d'un triangle conjugué par rapport à la conique on mène trois plans tangents à la surface, leur point de rencontre décrit un plan.

Extension du théorème précédent.

Appelons A la première surface donnée et concevons que par la conique C on fasse passer une deuxième surface B du second degré. Soit T le pôle du plan fixe P pris par rapport à B. Considérons un tétraèdre de sommet T conjugué par rapport à B, il sera coupé par le plan P suivant trois droites l, l', l'' qui formeront un triangle conjugué par rapport à la conique C d'intersection de la surface B et du plan P. Si le tétraèdre conjugué en question tourne, en se modifiant, autour de son sommet T et que par les trois côtés l, l', l'' de sa base on mène trois plans tangents à la première surface A, le point de rencontre de ces trois plans décrira une surface du second ordre Σ; on a donc le théorème général du paragraphe cité, que l'on peut énoncer ainsi :

Étant données deux surfaces du second ordre A *et* B, *si un tétraèdre conjugué par rapport à* B *tourne en se modifiant, autour d'un de ses sommets* T, *supposé fixe, et si par les trois arêtes de la base on mène trois plans*

tangents à la surface A, *leur point de rencontre aura pour lieu géométrique une surface du second ordre* Σ. *Cette surface passera par la conique* C *d'intersection de la surface* B *et du plan polaire de* T *pris par rapport à* B, *et en outre le plan de la conique* C *aura même pôle* S *par rapport à la surface* Σ *et à la première surface donnée* A.

Corollaire. — On voit que la surface Σ et la surface B ont deux sections planes communes, ce qui signifie qu'elles sont doublement tangentes. Si le sommet fixe T du tétraèdre considéré coïncide avec le centre de la surface B, le plan P est rejeté à l'infini; l'une des sections planes communes à B et à Σ est donc rejetée à l'infini: ces deux surfaces sont devenues homothétiques. D'autre part, les trois arêtes du tétraèdre issues du sommet fixe T sont devenues trois diamètres conjugués de B, et comme les droites l, l' et l'' sont à l'infini, on a ce théorème :

Si l'on mène à une surface du second ordre A *trois plans tangents parallèles à trois plans diamétraux conjugués d'une autre surface du second ordre* B, *leur point de rencontre décrit une troisième surface du second ordre* Σ, *homothétique à* B.

Cette proposition, donnée sous forme de problème au concours général en 1860, peut se démontrer directement comme il suit :

Prenons pour première surface un ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués, et, puisqu'il n'y a lieu de considérer que le parallélisme des plans, faisons coïncider les centres des deux surfaces. Elles auront pour équations

$$\text{(A)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$\text{(B)} \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy - 1 = 0.$$

Désignons maintenant par

$$K = m\ x + n\ y + p\ z = 0,$$
$$K' = m'\ x + n'\ y + p'\ z = 0,$$
$$K'' = m''x + n''y + p''z = 0$$

trois plans diamétraux de B, et soit $M(\alpha, \beta, \gamma)$ le point de rencontre des trois plans tangents à A menés parallèlement aux premiers.

Un plan parallèle à $K = 0$, mené par M, a pour équation

$$mx + ny + pz - (m\alpha + n\beta + p\gamma) = 0.$$

En exprimant que ce plan et les deux autres analogues sont tangents à la surface A, on a les trois équations de condition

$$\begin{aligned}
&(a^2 - \alpha^2)m^2 + (b^2 - \beta^2)n^2 + (c^2 - \gamma^2)p^2 \\
&\qquad - 2\beta\gamma np - 2\alpha\gamma mp - 2\alpha\beta mn = 0, \\
&(a^2 - \alpha^2)m'^2 + (b^2 - \beta^2)n'^2 + (c^2 - \gamma^2)p'^2 \\
&\qquad - 2\beta\gamma n'p' - 2\alpha\gamma m'p' - 2\alpha\beta m'n' = 0, \\
&(a^2 - \alpha^2)m''^2 + (b^2 - \beta^2)n''^2 + (c^2 - \gamma^2)p''^2 \\
&\qquad - 2\beta\gamma n''p'' - 2\alpha\gamma m''p'' - 2\alpha\beta m''n'' = 0.
\end{aligned}$$

D'autre part, puisque K, K' et K'' sont, par hypothèse, trois plans diamétraux conjugués de B, on a l'identité

$$\begin{aligned}
&\mu K^2 + \mu' K'^2 + \mu'' K''^2 - 1 \\
&\quad = A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2B yz + 2B' xz + 2B'' xy - 1,
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit les six relations

$$\begin{aligned}
&\mu m^2 + \mu' m'^2 + \mu'' m''^2 = A, \qquad && \mu np + \mu' n' p' + \mu'' n'' p'' = B, \\
&\gamma n^2 + \mu' n'^2 + \mu'' n''^2 = A', && \mu mp + \mu' m' p' + \mu'' m'' p'' = B', \\
&\mu p^2 + \mu' p'^2 + \mu'' p''^2 = A'', && \mu mn + \mu' m' n' + \mu'' m'' n'' = B''.
\end{aligned}$$

Ajoutons membre à membre les équations précédentes

respectivement multipliées par μ, μ' et μ'', et nous obtenons

$$\begin{aligned}A a^2 + A' b^2 + A'' c^2 \\ = A \alpha^2 + A' \beta^2 + A'' \gamma^2 + 2 B \beta\gamma + 2 B' \alpha\gamma + 2 B'' \alpha\beta.\end{aligned}$$

Le lieu du point M est donc une surface du second ordre homothétique à la surface B.

Cas de deux coniques. — Si l'on substitue aux surfaces A et B deux coniques que nous désignerons aussi par A et B, on aura des théorèmes analogues aux précédents.

Supposons d'abord que les deux coniques aient leurs plans parallèles et faisons $c = 0$ dans l'équation Σ, le lieu sera représenté par l'équation

$$\begin{aligned}[A d^2 x^2 + C d^2 y^2 + z^2 + 2 B d^2 xy + 2 D dxz + 2 E dyz] \\ - (A a^2 + C b^2)(z - d)^2 = 0.\end{aligned}$$

L'expression entre crochets est le premier membre de l'équation d'un cône passant par la conique B et dont le sommet est au centre de la conique A. Le lieu est donc une surface du second ordre inscrite dans ce cône suivant la conique B.

Supposons maintenant que les deux coniques n'aient pas leurs plans parallèles; prenons pour axe des y une droite menée par le centre de A parallèlement à l'intersection des deux plans, pour axe des x la direction conjuguée de cette droite dans le plan de A, et pour axe des z la direction conjuguée de la même droite dans le plan de la conique B. Les deux coniques seront définies par les deux couples d'équations

$$(A) \quad \begin{cases} z = 0, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} z + d = 0, \\ A y^2 + C z^2 + 2 D y + 2 E z + 1 = 0. \end{cases}$$

En appliquant le même procédé de calcul que pour deux surfaces, les droites l, l', l'' s'appliquent à la conique B : on trouve pour lieu une surface du second ordre passant par B et inscrite suivant cette courbe dans un cône ayant pour sommet un point S, pôle de la droite d'intersection des deux plans de A et de B, pris par rapport à A. On trouve, en effet, pour l'équation du lieu

$$\begin{aligned} A b^2(x+d)^2 + (a^2-d^2)(Ay^2+Cz^2) + a^2 - x^2 \\ + 2(a^2+dx)(Dy+Ez) = 0. \end{aligned}$$

Cette surface Σ passe par la conique B; le plan polaire du point S $\left(y=0,\ z=0,\ x=-\frac{a^2}{d}\right)$, pris par rapport à Σ, a pour équation

$$(x+d)\left[Ab^2d - \frac{a^2}{d}(Ab^2-1)\right] = 0 \quad \text{ou} \quad x+d=0.$$

On a donc ce théorème :

Étant données dans l'espace deux coniques quelconques A *et* B, *etc.*

Si l'on suppose $d=-a$, la surface Σ est un système de deux plans dont l'un est celui de la conique B. Si l'on suppose $d=0$, la conique B est une conique diamétrale de Σ, dont l'équation est alors

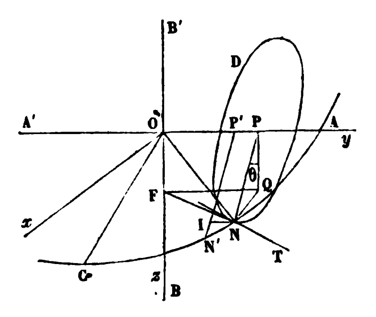
$$(Ab^2-1)x^2 + a^2(Ay^2+Cz^2+2Dy+2Ez+1) = 0.$$

PROBLÈME DE MÉCANIQUE RATIONNELLE; SOLUTION MODIFIÉE

Par M. V. HIOUX.

Il s'agit de la question donnée au concours d'agrégation de 1873. La première partie de la solution, publiée dans le numéro des *Nouvelles Annales* du mois de novembre 1874, doit être modifiée comme il suit :

Soit θ l'angle formé à l'époque t par le plan de l'anneau avec la partie inférieure OB de l'axe vertical BB',



autour duquel s'effectue le mouvement d'entraînement de vitesse constante ω. La charnière AA' demeure horizontale et l'anneau possède un mouvement relatif autour de cette charnière.

Soit N un point quelconque de l'anneau, de masse dm. Menons $NP = r$ perpendiculaire sur la charnière, NQ perpendiculaire au plan AOB et traçons PQ; l'angle NPQ est égal à θ. Traçons encore QF parallèle à OA jusqu'à sa rencontre avec OB au point F, et enfin me-

nons la droite FN. Cette droite FN, perpendiculaire sur OB, est le rayon du cercle que décrirait le point N si, à l'époque t, l'anneau se trouvait en repos relatif.

Observons maintenant que la trajectoire relative du point N est une circonférence D, de rayon constant égal à PN, dont le plan est perpendiculaire à la charnière AA'.

Une seule force effective agit sur le point N, c'est son poids $p = g\,dm$, dont la projection sur la tangente NT à la trajectoire relative a pour effet de diminuer l'angle θ. si le point N est pris sur la demi-circonférence ACA'.

D'autre part, à cause de la rotation d'entraînement, on doit considérer le point N comme soumis à l'action de deux forces apparentes :

1° *La force centrifuge.* — La projection de cette force sur le plan de la circonférence D est

$$f = dm\,\omega^2 \mathrm{FN} \frac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{FN}} = dm\,\omega^2 \mathrm{NQ},$$

ou enfin

$$f = dm\,\omega^2 r \sin\theta.$$

Elle a pour effet d'augmenter l'angle θ.

2° *La force centrifuge composée.* — Cette force n'influe pas sur le mouvement relatif du point N, car on sait qu'elle est perpendiculaire à la tangente NT, direction de la vitesse relative.

On pourra, par conséquent, se placer dans les conditions d'un mouvement absolu en considérant chacun des éléments dm de l'anneau comme soumis à l'action des deux forces

$$p = g\,dm \quad \text{et} \quad f = dm\,\omega^2 r \sin\theta.$$

Le mouvement de rotation de l'anneau autour de la charnière AA' est défini par l'équation

$$\Sigma dm\, r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = \Sigma \mathrm{Q}q.$$

Calcul de ΣQq. — La somme des moments des forces p par rapport à la charnière se réduit à

$$-\text{M}ag\sin\theta,$$

puisque les points de l'anneau sont symétriques, deux à deux, par rapport à l'axe AA'.

La somme des moments des forces f est

$$\Sigma dm\, r^2\omega^2\sin\theta\cos\theta.$$

L'équation différentielle du mouvement est donc

$$\Sigma dm\, r^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\text{M}ga\sin\theta + \Sigma dm\, r^2\omega^2\sin\theta\cos\theta.$$

Le rayon de l'anneau est désigné par a.

Calcul de $\Sigma dm.r^2$. — Dans cette expression, il y a une première partie égale à $\text{M}a^2$, puisque la masse additionnelle M est à une distance $\text{OC} = a$ de l'axe AA'.

Désignons la deuxième partie par $m\text{K}^2$; nous avons à déterminer le rayon de gyration K d'une circonférence homogène, par rapport à un de ses diamètres.

Soit $\text{NN}' = ds$; menons N'P' perpendiculaire sur AA' et NI perpendiculaire sur N'P', de manière à former un triangle infiniment petit NIN' semblable au triangle OPN. Pour déterminer K^2, on peut remplacer m et dm par des quantités proportionnelles $2\pi a$ et ds, en supposant l'anneau formé d'une matière continue. On a, par suite,

$$2\pi a\text{K}^2 = \int ds\, r^2,$$

l'intégration s'étendant à la circonférence entière.

Les deux triangles semblables NIN', OPN donnent

$$\frac{ds}{\text{PP}'} = \frac{a}{r},$$

d'où

$$r\,ds = a\text{PP}'.$$

On a, par suite,

$$\int ds \,.\, r^2 = a\int r \,.\, \mathrm{PP}' = a \times \pi a^2,$$

d'où résulte immédiatement

$$\mathrm{K}^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Dans ce calcul, on a négligé, selon l'usage, les infiniment petits d'ordre supérieur au premier.

La valeur de Σdmr^2 est donc

$$\left(\mathrm{M} + \frac{m}{2}\right) a^2.$$

L'équation différentielle du mouvement est donc finalement

$$\left(\mathrm{M} + \frac{m}{2}\right) a^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mathrm{M}ga\sin\theta + \left(\mathrm{M} + \frac{m}{2}\right) a^2\omega^2\sin\theta\cos\theta.$$

Si l'on pose, comme l'indique M. Gilbert, dans le numéro du mois d'avril 1877, $l = \frac{2\mathrm{M}+m}{2\mathrm{M}} a$, la suite du problème peut subsister sans modification.

QUESTIONS PROPOSÉES PAR M. S. RÉALIS

(voir 2e série, t. XV, p. 472);

SOLUTIONS DE M. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie.

Considérons le développement

$$\begin{aligned} f(m, x) &= 1 - m\varphi(x) + \frac{m(m-1)}{1.2}\varphi(x)\varphi(x+1) - \ldots \\ &\pm \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{1.2\ldots k}\varphi(x)\varphi(x+1)\ldots\varphi(x+k-1) \mp \ldots. \end{aligned}$$

On a aussi

$$f(m-1,x)$$
$$= 1-(m-1)\varphi(x)+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\varphi(x)\varphi(x+1)-\ldots$$
$$\pm\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-k)}{1.2\ldots k}\varphi(x)\varphi(x+1)\ldots\varphi(x+k-1)\mp\ldots,$$

et l'on en tire, par soustraction,

$$f(m,x)-f(m-1,x)$$
$$=-\varphi(x)\left[1-(m-1)\varphi(x+1)+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\varphi(x+1)\varphi(x+2)-\ldots\right],$$

ou bien

$$f(m,x)=f(m-1,x)-\varphi(x)f(m-1,x+1).$$

Comme, d'ailleurs, on a évidemment

$$f(0,x)=1,$$

la relation précédente permettra, dans certains cas, d'obtenir, sous une forme simple, la valeur de $f(m,x)$ lorsque m est un nombre entier positif.

Soit, par exemple,

$$\varphi(x)=\frac{ax+p}{ax+q},$$

on a

$$f(m,x)=f(m-1,x)-\frac{ax+p}{ax+q}f(m-1,x+1)$$

avec la condition initiale $f(0,x)=1$.

De là, on déduit successivement

$$f(1,x)=1-\frac{ax+p}{ax+q}=\frac{q-p}{ax+q},$$

$$f(2,x) = \frac{q-p}{ax+q} - \frac{ax+p}{ax+q} \cdot \frac{q-p}{a(x+1)+q}$$
$$= \frac{(q-p)(q-p+a)}{(ax+q)(ax+q+a)},$$

$$f(3,x) = \frac{(q-p)(q-p+a)}{(ax+q)(ax+q+a)}$$
$$- \frac{ax+p}{ax+q} \frac{(q-p)(q-p+a)}{(ax+q+a)(ax+q+2a)}$$
$$= \frac{(q-p)(q-p+a)(q-p+2a)}{(ax+q)(ax+q+a)(ax+q+2a)}.$$

La loi de formation des valeurs de $f(m, x)$ est évidente; il est facile de voir, en outre, que, si elle est vraie pour m, elle est vraie aussi pour $m+1$; on peut donc écrire

$$f(m,x) = \frac{(q-p)(q-p+a)\ldots[q-p+(m-1)a]}{(ax+q)(ax+q+a)\ldots[ax+q+(m-1)a]}.$$

Pour simplifier, faisons maintenant $x=0$, ce qui ne diminue en rien la généralité de la formule obtenue, et nous pourrons dire que l'expression

$$\frac{(q-p)(q-p+a)\ldots[q-p+(m-1)a]}{q(q+a)\ldots[q+(m-1)a]},$$

dans laquelle m est un entier positif et p, q, a sont des nombres quelconques, se développe dans la suite terminée

$$1 - \frac{p}{q}m + \frac{p(p+a)}{q(q+a)}\frac{m(m-1)}{1.2}$$
$$- \frac{p(p+a)(p+2a)}{q(q+a)(q+2a)}\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} + \ldots.$$

Les trois questions proposées sont des conséquences

de cette propriété. Il faut prendre respectivement

Première question..... $a = 2 \quad p = 1 \quad q = n + 1$

Deuxième question..... $a = 2 \quad p = n \quad q = n + 1$

Troisième question.... $a = 2 \quad p = n \quad q = n + 2$

Note. — Autres solutions de MM. Bourguet, de Virieu, Moret-Blanc.

QUESTION PROPOSÉE PAR M. BOURGUET

(voir 2e série, t. XVI, p. 185);

SOLUTION DE M. A. MUFFAT,

Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Lyon.

Trouver les racines de l'équation

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{x}{x+1} + \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} - \frac{x(x-1)(x-2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \ldots$$

Réduisons ensemble les deux premiers termes, il vient

$$0 = -\frac{x-1}{2(x+1)} + \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} + \ldots$$

L'équation admet donc évidemment la racine 1. Si nous divisons par $x - 1$ pour supprimer cette racine, et si nous multiplions par $x + 1$, ce qui n'introduit aucune racine étrangère à l'équation, nous avons, en changeant les signes,

$$0 = \frac{1}{2} - \frac{x}{x+2} + \frac{x(x-2)}{(x+2)(x+3)} - \frac{x(x-2)(x-3)}{(x+2)(x+3)(x+4)} + \ldots$$

Réduisons encore ensemble les deux premiers termes, on a

$$o = -\frac{x-2}{2(x+2)} + \frac{x(x-2)}{(x+2)(x+3)} - \ldots$$

L'équation admet, par suite, la racine 2. Il est facile de démontrer que cette équation admet tous les nombres entiers pour racines : supposons que les $n-1$ premiers nombres aient été trouvés pour racines en simplifiant chaque fois l'équation, on arrivera à

$$o = \frac{1}{2} - \frac{x}{x+n} + \frac{x(x-n)}{(x+n)(x+n+1)} - \frac{x(x-n)[x-(n-1)]}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)} + \ldots,$$

et, en opérant comme plus haut,

$$o = -\frac{x-n}{2(x+n)} + \frac{x(x-n)}{(x+n)(x+n+1)} - \ldots$$

Ainsi $x = n$ est encore racine. Nous avons vu que 1 et 2 étaient racines, donc 3, 4, ... sont aussi racines, et, par suite, l'équation proposée admet pour racines tous les nombres entiers positifs.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE (ANNÉE 1877);

Mathématiques (3 heures).

PREMIÈRE QUESTION. — *Calcul logarithmique.*

Dans le triangle ABC on donne $A = 128^\circ 47' 35''$, $AB = 8344^{m},27$, $AC = 5862^{m},35$, et l'on demande de calculer les angles B et C et la hauteur abaissée du sommet A sur le côté BC.

DEUXIÈME QUESTION.

Résoudre l'équation $x + \sqrt{a^2 - x^2} = b$, dans laquelle les quantités données a et b sont supposées réelles et positives.

Donner la condition de réalité des racines et, en la supposant remplie, examiner si les racines satisfont toutes à l'équation.

TROISIÈME QUESTION.

On donne un demi-cercle construit sur AB comme diamètre et l'on mène la tangente BT au point B. Cela posé, on demande de mener par le point A la sécante AMN (M et N étant les points où elle coupe la demi-circonférence et la tangente BT), telle que si l'on fait tourner la figure autour de AB, le volume engendré par la portion de cercle AMB soit équivalent au volume engendré par la surface MNB qui est limitée par les droites MN, NB et l'arc de cercle MB.

Épure ($2^h 30^m$).

On donne un point S dans l'espace, situé à 45 millimètres au-dessus du plan horizontal et à 60 millimètres en avant du plan vertical de projection. Ce point est le sommet de deux cônes droits à base circulaire. Le premier de ces deux cônes repose par sa base sur le plan horizontal de projection : son axe est en conséquence vertical; le second cône a son axe perpendiculaire au plan vertical de projection contre lequel il s'appuie par sa base. Le rayon de base de chacun de ces deux cônes est de 36 millimètres. On donne aussi un point O situé sur l'axe du second cône entre la base et le sommet S et à 17 millimètres de ce sommet.

Cela posé, on demande :

1° De construire les projections de l'ensemble des deux corps ;

2° De mener, par le point O, un plan vertical faisant un angle de 45 degrés avec le plan vertical de projection, et de construire les projections des sections faites dans les deux cônes par ce plan ;

3° De mener par l'un des points où la trace horizontale du plan sécant rencontre la base du premier cône un plan tangent à ce premier cône ;

4° Enfin de mener un plan tangent au second cône perpendiculairement à ce premier plan tangent.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. Teoria dei fuochi delle coniche (Geometria proiettiva), dettata agli alunni dell' Istituto tecnico di Girgenti, nell' anno scolastico 1875-76 ; per *Ferdinando Pisani*, professore di Matematiche superiori e Geometria descrittiva. — Napoli, stabilimento tipografico dell' Unione. Strada Nuova Pizzofalcone, 3 (1877).

2. Dimostrazioni geometriche delle principali formole di Trigonometria ; per *Fernando Pisani*, professore di Matematiche superiori e Geometria descrittiva, presso gli Istituti tecnici. — Napoli, stabilimento tipografico dell' Unione. Strada Nuova Pizzofalcone, 3 (1877).

3. Formole empiriche per l'Idraulica sperimentale, nuove formole per le portate del Pò e del Tevere. Appendice all' Idraulica matematica e pratica dell' inge-

gnere *Ildebrando Nazzani*, professore nella R. Scuola superiore delle Miniere di Palermo. — Palermo, Luigi Pedone-Lauriel, editore (1877). — Prezzo : lire tre.

BIBLIOGRAPHIE.

Traité d'Algèbre élémentaire, rédigé conformément aux Programmes officiels; par *H. Signol*, professeur de Mathématiques, à Paris. 1 volume in-8, de 336 pages. Prix : 4 fr. 50.

Ce qui frappe tout d'abord en ouvrant ce livre, c'est l'ordre et la disposition des matières, leur aménagement pour ainsi parler. Cet ordre méthodique et la clarté qui en résulte ont été l'objet constant de la préoccupation de l'auteur, comme il le dit lui-même dans les premières lignes de l'Avant-propos. C'est par là que ce Traité se distingue, de prime abord, de plusieurs autres ouvrages écrits sur le même sujet.

De cette appréciation générale et toute de forme, nous allons passer à l'analyse de l'Ouvrage, en regrettant toutefois que l'espace dont nous disposons ne nous permette pas de faire connaître tout ce qui mérite d'être signalé.

L'Ouvrage est divisé en quatre Livres, comprenant chacun plusieurs Chapitres subdivisés eux-mêmes en un grand nombre de paragraphes. Ce travail de divisions et de subdivisions a été fait, nous le répétons, avec un soin et un entendement remarquables.

Le Livre I traite des *Règles du calcul algébrique*. Il est divisé en neuf Chapitres.

Dans le Chapitre I, qui contient les notions préliminaires, l'auteur commence par dire ce qu'on entend par *solution générale* d'une question et en donne un exemple très-simple. De là découle naturellement la définition suivante de l'Algèbre,

dont *l'objet principal est de donner des méthodes propres à conduire à la solution générale des diverses questions que l'on peut se proposer sur les nombres.*

Un paragraphe spécial est consacré au calcul de la valeur numérique d'un polynôme ordonné, par le procédé connu qui dispense de calculer séparément chacune des puissances de la lettre ou des lettres qui figurent dans le polynôme. De nombreux exemples accompagnent les indications données en principe par l'auteur.

On trouve dans un autre paragraphe quelques détails sur les analogies qui existent entre les nombres entiers et certaines expressions algébriques. Ces rapprochements sont instructifs et propres à fixer les idées sur les symboles généraux qui servent d'instrument à l'Algèbre. D'ailleurs l'auteur y revient dans les Chapitres suivants en comparant les opérations de l'Algèbre à celles de l'Arithmétique. Cette comparaison, qui n'est qu'indiquée dans l'Ouvrage, pourra être utilement proposée comme exercice aux élèves.

Nous remarquons dans le Chapitre IV un paragraphe contenant plusieurs théorèmes relatifs à la multiplication.

Les paragraphes qui terminent le Chapitre V relatif à la division ont été traités avec beaucoup de soin et méritent une attention particulière. Le dernier a pour objet la décomposition d'un polynôme en facteurs du premier degré ; l'auteur a tiré un bon parti de cette décomposition dans plusieurs endroits de l'Ouvrage.

Le Chapitre IX a pour titre : *Usage et utilité des quantités négatives dans le calcul algébrique.* L'auteur y montre les avantages qu'on retire, dans le calcul algébrique purement abstrait, des règles admises pour le calcul des quantités négatives. C'est là un objet tout à fait distinct de celui qu'on se propose en traitant de l'usage des quantités négatives dans la résolution des problèmes.

Le Livre II traite des équations du premier degré. Dans la nécessité où nous sommes d'être bref, nous nous contenterons de signaler le Chapitre IV, relatif aux diverses méthodes d'éli-

mination et aux principes sur lesquels elles sont fondées; le Chapitre VIII où se trouvent d'excellents développements sur l'indétermination et ses formes diverses; le Chapitre IX qui a pour objet les principes relatifs aux inégalités en général, et en particulier la résolution des inégalités du premier degré.

Le Livre III traite des équations du second degré et de celles qui en dépendent. Ce Livre constitue, par son importance et ses développements, la partie capitale de l'Ouvrage. Il renferme neuf Chapitres traités chacun avec le plus grand soin.

Le Livre IV et dernier comprend les progressions et les logarithmes. On y retrouve les mêmes qualités de méthode et de clarté que dans les Livres précédents.

Enfin une table des matières, très-détaillée et très-propre à faciliter les recherches, permet de juger d'un coup d'œil de l'ensemble et de l'ordre des parties qui composent l'Ouvrage.

Pour nous résumer, nous dirons que le Traité d'Algèbre de M. Signol mérite d'être accueilli favorablement par MM. les Professeurs, et nous sommes convaincu que ceux qui en prendront connaissance ratifieront pleinement notre appréciation.

CORRESPONDANCE.

MM. Droz, ingénieur à Zurich, et Joseph Narino, élève au Lycée de Marseille, nous ont adressé des solutions de la question de Mathématiques élémentaires, proposée au Concours général (année 1876). Cette question a déjà été résolue l'année dernière (*voir* 2e série, t. XV, p. 374), et elle ne nous semble pas présenter un intérêt assez grand pour que nous y revenions.

M. Jules Molk, élève de l'École Polytechnique de Zurich, a traité, par des calculs, la question 1221, dont une solution géométrique très-simple a été insérée dans le cahier de mai (p. 235).

M. Édouard Lucas nous a communiqué une solution *complète* de la question 1180, que nous ferons prochainement connaître.

La question 1222 a été résolue par M. Th. Franchy, maître répétiteur au Lycée de Moulins; les questions 1223, 1226 par M. Ch. Brunot, élève de Mathématiques spéciales au Lycée de Dijon; 1224, par MM. Vladimir Habbé, Launois, Barbarin; 1226, par M. Jules Freson, élève de l'École des Mines, à Liége.

SUR L'IMPOSSIBILITÉ DE RÉSOUDRE EN NOMBRES ENTIERS L'ÉQUATION $x^3 = y^2 + 17$.

Cette équation revient à $x^3 + 2^3 = y^2 + 5^2$, d'où

(1) $$(x+2)[(x-1)^2+3] = y^2 + 5^2.$$

Deux cas sont à distinguer : suivant que y est premier avec 5, ou multiple de 5.

Dans le premier, il faut, pour que l'équation admette une solution, en nombres entiers, que $(x-1)^2+3$ soit égal à la somme de deux carrés *premiers entre eux* (*), ce qui est impossible parce que le nombre entier $(x-1)^2+3$ est compris dans l'une ou l'autre de ces deux formes : $4n$, $4n+3$.

En second lieu, lorsque y est multiple de 5, l'équation (1) peut s'écrire

(2) $$(x+2)[(x-1)^2+3] = 5^2(z^2+1),$$

en posant $y = 5z$.

(*) LEGENDRE, *Théorie des nombres*, t. I, p. 203, 3e édition. *Tout diviseur de la formule t^2+u^2, composée de deux carrés premiers entre eux, est également la somme de deux carrés premiers entre eux.*

Or, $(x-1)^2+3$ est premier avec 5, car le chiffre des unités simples du carré d'un nombre entier, augmenté de 3, est nécessairement différent de 5 et de zéro. Par conséquent $(x-1)^2+3$ devrait être diviseur exact de z^2+1, ce qui est encore impossible, puisque $(x-1)^2+3$ n'est pas la somme de deux carrés *premiers entre eux*.

Donc, l'équation $x^3=y^2+17$ n'admet aucune solution *en nombres entiers*. (G.)

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1224

(voir p. 191);

PAR M. MORET-BLANC.

Soit une famille de courbes planes représentées par l'équation $f(x, y, \alpha)=0$, α étant un paramètre variable; trouver :

1° *Le lieu des points où la tangente est parallèle à une droite donnée;*

2° *Le lieu des points où le rayon de courbure a une grandeur donnée.*

Applications aux paraboles de même axe et de même sommet, aux ellipses ayant un axe commun.

(LAISANT.)

1° Soit m le coefficient angulaire de la direction donnée. On obtiendra le lieu des points où la tangente est

parallèle à cette direction, en éliminant le paramètre variable α entre les équations

$$(1) \qquad f(x, y, \alpha) = 0,$$

$$(2) \qquad f'_x(x, y, \alpha) + m f'_y(x, y, \alpha) = 0.$$

2° Soit R la valeur donnée du rayon de courbure; on obtiendra le lieu des points où il a cette valeur en éliminant α entre l'équation (1) et

$$(3) \qquad \pm \frac{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2 y}{dx^2}} = R,$$

où $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{d^2 y}{dx^2}$ ont les valeurs déduites de l'équation (1).

Application aux paraboles du même axe et de même sommet.

Les équations sont alors

$$(1) \qquad y^2 - 2\alpha x = 0,$$

$$(2) \qquad my - \alpha = 0,$$

$$(3) \qquad \pm \frac{(\alpha^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{\alpha^2} = R.$$

L'élimination de α entre les deux premières donne

$$y(y - 2mx) = 0.$$

La solution $y = 0$ correspond au cas limite où, le paramètre devenant nul, la parabole se réduit à deux droites coïncidentes $y^2 = 0$, que toute droite coupe en deux points coïncidents.

La solution $y = 2mx$ correspond aux vraies paraboles.

Ce résultat pouvait être prévu sans calcul : en effet, les paraboles de même axe et de même sommet sont homothétiques, et le sommet est le centre d'homothétie; les points homologues, où les tangentes sont parallèles, sont donc sur une droite passant par le sommet, et dont le coefficient angulaire est double de celui des tangentes, puisque la sous-tangente est double de l'abscisse.

L'élimination de α entre les équations (1) et (3) donne

$$(y^2 + 4x^2)^3 = 4R^2x^2y^2,$$

ou, en coordonnées polaires,

$$r^2(1 + 3\cos^2\theta)^3 = R^2\sin^2 2\theta,$$

equation du lieu des points où le rayon de courbure est égal à R. La courbe étant symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées rectangulaires, il suffit de considérer

$$r = \frac{R\sin 2\theta}{(1+3\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}},$$

en faisant varier θ de zéro à $\frac{\pi}{2}$.

r s'annule pour $\theta = 0$ et pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. En égalant sa dérivée à zéro, on obtient, pour déterminer la valeur de θ, qui rend le rayon vecteur maximum,

$$\text{tang}^4\theta - 6\,\text{tang}^2\theta - 4 = 0,$$

d'où

$$\text{tang}^2\theta = 3 + \sqrt{13}, \quad \theta = 68^\circ 44' 23''.$$

La valeur maximum de r est sensiblement $r = 0,41R$.

La courbe est donc une rosace à quatre feuilles disposées symétriquement par rapport aux axes, mais non symétriques par rapport au rayon vecteur maximum.

Application aux ellipses ayant un axe commun.

Les équations sont, dans ce cas,

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\alpha^2}-1=0,$$

$$(2)\qquad \frac{x}{a^2}+m\frac{y}{\alpha^2}=0,$$

$$(3)\qquad \frac{(a^4y^2+\alpha^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4\alpha^4}=\text{R}.$$

L'élimination de α entre les deux premières donne

$$xy-mx^2+ma^2=0.$$

Cette équation, étant indépendante du signe de b^2, convient aussi aux hyperboles ayant pour axe transverse l'axe donné. C'est une hyperbole ayant pour asymptotes les droites $x=0$, $y=mx$. La partie de la courbe comprise entre les abscisses $x=+a$ et $x=-a$ correspond aux ellipses, et le reste de la courbe aux hyperboles.

Si l'on élimine α entre les équations (1) et (3), on obtient

$$[(a^2-x^2)^2+x^2y^2]^3=a^4\text{R}^2(a^2-x^2)^2y^2,$$

équation du lieu des points des ellipses et des hyperboles $\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{\alpha^2}-1=0$, où le rayon de courbure est égal à R.

C'est une courbe symétrique par rapport aux axes.

L'équation développée

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&x^6y^6+3(a^2-x^2)^2x^4y^4+(a^2-x^2)^2\\&\quad\times[3x^2(a^2-x^2)^2-a^4\text{R}^2]y^2+(a^2-x^2)^6=0\end{aligned}\right.$$

est du troisième degré en y^2; l'une des racines est négative, sauf pour $x^2=a^2$, où les trois valeurs de y^2 sont

nulles : les extrémités de l'axe donné sont donc des points sextuples.

Pour $x = 0$, les trois valeurs de y^2 sont

$$\frac{a^4}{R^2}, \quad +\infty, \quad -\infty.$$

Ainsi, x^2 croissant à partir de zéro, deux racines seront positives et ne pourront devenir imaginaires qu'en devenant d'abord égales.

Posons

$$(a^2 - x^2)^2 + x^2 y^2 = u.$$

Les valeurs de y^2 seront réelles, ou égales en même temps que celles de u.

L'équation devient

$$u^3 - \frac{a^4 R^2 (a^2 - x^2)^2}{x^2} u + \frac{a^4 R^2 (a^2 - x^2)^4}{x^2} = 0.$$

La condition de réalité des racines est

$$(a^2 - x^2)^2 [27 x^2 (a^2 - x^2)^2 + 4 a^4 R^2] \leq 0.$$

Lorsque x varie de zéro à a, la valeur maximum de $27x^2(a^2 - x^2)^2$ est $4a^6$; donc si $R < a$, le premier membre de la relation précédente s'annulera pour deux valeurs de x comprises entre zéro et a, et pour une troisième valeur plus grande que a. Soient x_1, x_2, x_3 ces trois valeurs; y_1, y_2, y_3 les valeurs correspondantes de y.

A raison de la double symétrie, il suffit d'étudier la partie de la courbe située dans l'angle des coordonnées positives.

Une branche coupe l'axe des y au point $y = \frac{a^2}{R}$, s'en écarte jusqu'au point (x_1, y_1), puis s'en rapproche indéfiniment en ayant cet axe pour asymptote. Entre les abscisses x_1 et x_2, il n'y a aucun point de la courbe. Au

point (x_2, y_2) commence une boucle qui va se fermer au point $x = a, y = 0$; puis une nouvelle boucle, plus petite que la première, commence à ce point et va se fermer au point (x_3, y_3) : l'abscisse x_3 limite la courbe.

Si l'on a $R > a$, les boucles intérieures se réunissent à la partie centrale, et il n'y a plus de solution de continuité.

Dans le cas particulier où $R = 0$, l'équation (4) se décomposent en deux autres :

$$x^2 + y^2 - a^2 = 0,$$
$$x^6 y^4 + (x^2 - a^2)(2x^2 - 3a^2) x^4 y^2 + (x^2 - a^2)^3 = 0.$$

La première représente le cercle de rayon a, solution évidente *a priori*.

Pour $x^2 < a^2$, la seconde donne, pour y^2, deux valeurs de signes contraires; il y a donc une seconde branche

$$y^2 = \frac{(a^2 - x^2)\left[(2x^2 - 3a^2)x + \sqrt{4a^6 - 3a^4 x^2}\right]}{2x^3}.$$

Pour $x^2 > a^2$, les deux valeurs de y^2 sont positives ou imaginaires : la condition de réalité est

$$x^2 < \frac{4a^2}{3}.$$

Ainsi, outre le cercle, on a une courbe, dont les deux branches asymptotiques de chaque côté à l'axe des y viennent toucher le cercle aux deux extrémités de l'axe donné, et forment ensuite de chaque côté deux boucles limitées aux droites $x = \pm \frac{2a}{\sqrt{3}}$, qu'elles touchent aux points $y = \pm \frac{a}{2\sqrt{6}}$.

Note. — Autres solutions de MM. Gustave Choquet, maître auxiliaire au lycée de Lille; Ferdinando Pisani, professeur; Barbarin, élève à l'École Normale supérieure.

Question 1227

(voir p. 192);

PAR M. CH. BRUNOT,
Élève en Mathématiques spéciales, au lycée de Dijon.

Si des différents points de la tangente au sommet d'une parabole on mène aux rayons aboutissant au foyer des perpendiculaires égales à ces rayons, le lieu de leurs extrémités se compose des deux tangentes à la parabole, inclinées de 45 degrés sur l'axe.

En conclure la propriété suivante du triangle ABC *rectangle en* A :

Soient a, b, c les centres des carrés respectivement construits sur l'hypoténuse et les deux côtés de l'angle droit; la ligne A*a est perpendiculaire, au point* A, *à la droite b*A*c, et elle lui est égale en longueur.*

Application aux triangles dans lesquels on fait varier l'un des sommets B *sur le côté* AB.

(H. BROCARD.)

Soient a le foyer de la parabole; A le pied de la directrice; P un point quelconque de la tangente au sommet S de la parabole; BPC une perpendiculaire à Pa; B et C deux points du lieu considéré; D le point où la droite aP prolongée rencontre la directrice, et α l'angle AaP (*). Si l'on décrit le cercle ayant P pour centre et passant au point a, il est circonscrit au triangle ABC, et les trois droites BC, AC et BC sont tangentes à la parabole; car, en joignant le point a aux points où ces droites rencontrent la tangente au sommet, les droites ainsi obtenues sont perpendiculaires à BC, AC, AB.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure. — La droite aP étant per-

Soient a, b, c les centres des carrés construits sur l'hypoténuse BC et les côtés AC, AB du triangle rectangle BAC; la droite bAc est perpendiculaire sur Aa et les droites bAc, Aa sont égales entre elles, comme étant les projections de deux diamètres du cercle, faites sous des angles égaux à α (*).

Note. — Autre solution géométrique par M. Th. Franchy, maître répétiteur au lycée de Moulins.

Solutions analytiques par MM. Moret-Blanc; Lez; Pisani; Sondat; Jules Freson; Georges Lambiotte; Louis Thuillier, du lycée d'Amiens; Cauboue; Paul Souverain.

Question 1229

(voir p. 239);

PAR M. CH. BRUNOT,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

« *Si les trois racines de l'équation* $x^3 - 3qx + r = 0$ *sont réelles, chacune d'elles est moindre que* $2\sqrt{q}$; *mais, si une seule de ces racines est réelle, sa valeur surpasse* $2\sqrt{q}$. » (R.-W. GENESE.)

1° En supposant les trois racines réelles, on a

$$-4q^3 + r^2 < 0$$

---

pendiculaire au milieu P de BC, on a $aB = aC$. La droite PS est perpendiculaire sur aA, en son milieu S : donc $PA = Pa = PD$. La circonférence décrite du point P, comme centre, avec Pa pour rayon, passe aux points a, A, B, C, D. Le quadrilatère aBCD inscrit dans le cercle est un carré. L'angle BAC est droit. Les droites AB, AC font, avec l'axe Aa de la parabole, des angles de 45 degrés.

(*) Les points b, c sont les projections de B, C sur la directrice AD de la parabole, qui forme des angles de 45 degrés avec les côtés AB, AC de l'angle droit du triangle BAC. On a $bc = BC\cos\alpha$. Le point a est le centre du carré construit sur l'hypoténuse BC du triangle BAC, et $Aa = aD\cos\alpha = BC\cos a$: donc $Aa = bc$.

ou

$$(r - 2q\sqrt{q})(r + 2q\sqrt{q}) < 0,$$

ce qui donne

$$r - 2q\sqrt{q} < 0 \quad \text{et} \quad r + 2q\sqrt{q} > 0.$$

Or le premier membre de la première de ces deux inégalités est le résultat de la substitution de $-2\sqrt{q}$ et de $+\sqrt{q}$ à x dans l'équation; de même, le premier membre de la seconde est le résultat de la substitution de $-\sqrt{q}$ et de $+2\sqrt{q}$: on n'a donc que des variations de signes dans la suite

$$f(-2\sqrt{q}), \quad f(-\sqrt{q}), \quad f(\sqrt{q}), \quad f(+2\sqrt{q}),$$

ce qui démontre la première partie de la proposition.

2° Si une seule des racines est réelle, on aura

$$-4q^3 + r^2 > 0,$$

d'où

$$f(-2\sqrt{q}) > 0 \;(*) :$$

la racine sera donc comprise entre $-\infty$ et $-2\sqrt{q}$; cette racine est, en valeur relative, inférieure à $-2\sqrt{q}$ (**).

Note. — Autres solutions de MM. Sondat; Moret-Blanc; Raymond Moreau, élève en Mathématiques élémentaires au lycée de Châteauroux (classe de M. Escary); et A. Muffat, élève en Mathématiques spéciales au lycée de Lyon; Barthe, élève au lycée de Bordeaux (classe de M. Lagrandval); Henri Picat, du lycée de Grenoble.

(*) En supposant que, les signes des termes de l'équation

$$x^3 - 3qx + r = 0$$

étant mis en évidence, les coefficients q et r soient positifs.

(**) En valeur absolue, elle est supérieure à $2\sqrt{q}$.

QUESTIONS.

1243. Dans tous les triangles circonscrits à une conique donnée, et tels que les hauteurs passent par les points de contact des côtés opposés, le rapport d'une hauteur au diamètre conjugué de celui qui passe par son pied sur la conique est constant. (POUJADE.)

1244. Soient m, n, p les bissectrices des angles d'un triangle, opposés aux côtés a, b, c; démontrer que

$$c\left(pn\cos\frac{B}{2}+mn\cos\frac{A}{2}-pm\cos\frac{C}{2}\right)=$$

$$b\left(mn\cos\frac{A}{2}+pm\cos\frac{C}{2}-pn\cos\frac{B}{2}\right)=$$

$$a\left(np\cos\frac{B}{2}+pm\cos\frac{C}{2}-pn\cos\frac{A}{2}\right)=mnp.$$

(LEZ.)

1245. Toute corde menée par le foyer d'une parabole est égale au quadruple du rayon vecteur du point de contact de la tangente parallèle à cette corde.

(P. SONDAT.)

1246. *Théorème.* — a, b, c, ..., k étant des quantités inégales, on a

$$\text{(A)}\quad \sum\left(\frac{1}{a-b}+\ldots+\frac{1}{a-k}\right)\times\left[\frac{1}{(a-b)^2(a-c)^2(a-k)^2}\right]=0.$$

Soient, par exemple,

$$a=2,\quad b=5,\quad c=7,\quad d=11,$$

l'égalité (A) devient

$$\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{9}\right)\left(\frac{1}{9.25.81}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{9.4.36}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{25.4.16}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{81.36.16}\right)=0.$$

(CATALAN.)

1247. Dans les surfaces du second ordre à centre unique, ce centre pouvant d'ailleurs être situé à distance finie ou infinie, le lieu des points tels que les génératrices rectilignes, réelles ou imaginaires, soient orthogonales, est donné par l'intersection, réelle ou imaginaire, de la surface considérée, avec la sphère de Monge, relative à cette même surface. (ESCARY.)

1248. Démontrer que $\sqrt{5}$ est égal à la limite du rapport des deux séries

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{13}+\ldots,\quad \text{et}\quad \frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{11}-\frac{1}{29}+\ldots,$$

dans lesquelles chacun des dénominateurs est donné par la relation $D_{n+2}=3D_{n+1}-D_n$. (E. LUCAS.)

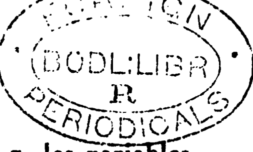
Rectifications. — Page 219, ligne 13 : *au lieu de* l'axe des paraboles, *lisez* l'une des paraboles.

Page 222, ligne 2 : *au lieu de* $\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A}$, il faut $\frac{2\sqrt{B^2-AC}}{A}$.

GÉNÉRATION DE CERTAINES SURFACES PAR LEURS LIGNES DE COURBURE;

PAR M. E. AMIGUES,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nice.

1. Les trois équations



$$(1)\qquad f(x,y,z) = \mu,$$

$$(2)\qquad f_1(x,y,z) = \nu,$$

$$(3)\qquad \varphi(\mu,\nu) = 0$$

contiennent, outre les variables x, y, z, les variables auxiliaires μ et ν, que l'on pourrait éliminer. Le système de ces trois équations représente donc une surface A.

L'équation (1) représente une famille de surfaces, l'équation (2) une autre famille, et pour tout système de valeurs de μ et de ν, qui est solution de l'équation (3), l'ensemble des équations (1) et (2) représente une courbe tracée sur la surface A.

On peut regarder cette surface A comme engendrée par ces diverses courbes.

2. L'équation de la surface A en coordonnées rectilignes est évidemment

$$\varphi[f(x,y,z),\ f_1(x,y,z)] = 0.$$

Le plan tangent en un point xyz de cette surface a donc pour équation

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{d\varphi}{d\mu}\left[(X-x)\frac{df}{dx} + (Y-y)\frac{df}{dy} + (Z-z)\frac{df}{dz}\right] \\ &\quad + \frac{d\varphi}{d\nu}\left[(X-x)\frac{df_1}{dx} + (Y-y)\frac{df_1}{dy} + (Z-z)\frac{df_1}{dz}\right] = 0. \end{aligned} \right.$$

Par le point xyz passe une des courbes génératrices, qui est l'intersection des surfaces

$$(5)\qquad f(x, y, z) = \mu_1,$$

$$(6)\qquad f_1(x, y, z) = \nu_1.$$

Les plans tangents menés en ce point à ces deux surfaces sont représentés par les équations

$$(7)\quad (X-x)\frac{df}{dx} + (Y-y)\frac{df}{dy} + (Z-z)\frac{df}{dz} = 0,$$

$$(8)\quad (X-x)\frac{df_1}{dx} + (Y-y)\frac{df_1}{dy} + (Z-z)\frac{df_1}{dz} = 0.$$

Considérons les trois plans tangents (4), (7), (8) qui contiennent tous trois la tangente au point xyz de la ligne d'intersection des surfaces (5) et (6). Soient d'ailleurs X, Y, Z les coordonnées d'un point du plan tangent (4). En désignant par p et p_1 les distances de ce point avec deux autres plans tangents, nous avons

$$p = \frac{(X-x)\frac{df}{dx} + (Y-y)\frac{df}{dy} + (Z-z)\frac{df}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}},$$

$$p_1 = \frac{(X-x)\frac{df_1}{dx} + (Y-y)\frac{df_1}{dy} + (Z-z)\frac{df_1}{dz}}{\sqrt{\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dz}\right)^2}}.$$

D'après ces valeurs, l'équation (4) devient

$$p\frac{d\varphi}{d\mu}\sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}$$
$$+ p_1\frac{d\varphi}{d\nu}\sqrt{\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df_1}{dz}\right)^2} = 0,$$

d'où l'on tire

$$\frac{p^2}{p_1^2}=\frac{\left(\frac{d\varphi}{d\nu}\right)^2\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2+\left(\frac{df_1}{dy}\right)^2+\left(\frac{df_1}{dz}\right)^2}{\left(\frac{d\varphi}{d\mu}\right)^2\left(\frac{df}{dx}\right)^2+\left(\frac{df}{dy}\right)^2+\left(\frac{df}{dz}\right)^2}.$$

Il peut arriver que le rapport

$$\frac{\Sigma\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2}{\Sigma\left(\frac{df}{dx}\right)^2},$$

qui est indépendant de X, Y, Z, soit en outre le même tout le long de la courbe considérée, c'est-à-dire que, si l'on tire x et y des équations (5) et (6) pour porter dans ce rapport, la variable z disparaisse d'elle-même. Dans ce cas-là on a

$$\frac{p^2}{p_1^2}=\mathrm{F}(\mu_1,\nu_1).$$

3. Imaginons que toute courbe (μ_1, ν_1) tracée sur la surface A soit ligne de courbure sur la surface μ_1 et aussi sur la surface ν_1. Alors ces deux surfaces μ_1 et ν_1 se coupent sous un angle constant tout le long de cette ligne de courbure commune. Si, en outre, le rapport

$$\frac{\Sigma\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2}{\Sigma\left(\frac{df}{dx}\right)^2}$$

cesse de contenir z dès que l'on y porte les valeurs de x et de y tirées des équations (1) et (2), le rapport $\frac{p}{p_1}$ est constant le long de chacune de ces courbes génératrices. D'où il faut conclure que la surface A, tout le

long de chacune de ces courbes génératrices, coupe sous un angle constant chacune des deux surfaces dont cette génératrice est l'intersection; et, par conséquent, que ces courbes génératrices forment une série de lignes de courbure sur la surface A.

La conclusion de ce qui précède est facile à tirer. Toutes les fois que l'on aura trouvé deux familles de surfaces

$$f(x, y, z) = \mu, \tag{9}$$

$$f_1(x, y, z) = \nu, \tag{10}$$

telles que l'intersection de toute surface de la première famille par toute surface de la seconde soit une ligne de courbure commune, et telles en outre que le rapport

$$\frac{\sum\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2}{\sum\left(\frac{df}{dx}\right)^2}$$

ne contienne plus z dès qu'on y portera les valeurs de x et de y tirées des équations (9) et (10), alors toute équation

$$\varphi[f(x, y, z), f_1(x, y, z)] = 0$$

représentera, quelle que soit la fonction φ, une surface engendrée par ses propres lignes de courbure.

4. Soit un système triplement orthogonal

$$f(x, y, z) = \rho,$$
$$f_1(x, y, z) = \rho_1,$$
$$f_2(x, y, z) = \rho_2.$$

Supposons que ce système satisfasse à cette condition

que le rapport

$$\frac{\sum\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2}{\sum\left(\frac{df}{dx}\right)^2}$$

ne dépende pas de ρ_2 quand on y remplace x, y, z par leurs valeurs en fonction de ρ, ρ_1, ρ_2.

S'il en est ainsi, toute équation telle que

$$\varphi(\rho, \rho_1) = 0$$

représente une surface dans laquelle les lignes de courbure de la première série sont les intersections de surface f avec des surfaces f_1.

La seconde série est alors facile à trouver; car toute surface f_2 est perpendiculaire à toute ligne de courbure de la première série, et par conséquent coupe la surface φ suivant une ligne de courbure de la seconde série.

On voit combien il y a intérêt à chercher les systèmes orthogonaux qui satisfont à la condition précédente.

Adoptant les notations de M. Lamé, nous écrirons

$$ds^2 = H^2 d\rho^2 + H_1^2 d\rho_1^2 + H_2^2 d\rho_2^2.$$

Les formules élémentaires de la théorie des systèmes orthogonaux nous donnent

$$\sum\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2 = \frac{1}{H_1^2}, \quad \sum\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = \frac{1}{H^2}.$$

Il s'agit donc de chercher les systèmes orthogonaux pour lesquels le rapport $\frac{H}{H_1}$ ne dépend pas de ρ_2.

Soit G une fonction de ρ et de ρ_1 ne contenant pas ρ_2, on a

$$(11) \qquad H = H_1 G.$$

Considérons alors avec M. Darboux les six quantités

définies par la formule suivante, où j est différent de i:

$$\beta_{ij} = \frac{1}{H_i} \frac{dH_j}{d\rho_i}.$$

D'après cette définition, on a

$$(12) \qquad \beta_{20} = \frac{1}{H_2} \frac{dH}{d\rho_2},$$

c'est-à-dire, en différentiant l'équation (11),

$$\beta_{20} = \frac{1}{H_2} G \frac{dH_1}{d\rho_2},$$

et, par suite,

$$(13) \qquad \beta_{20} = G \beta_{21}.$$

Or M. Darboux a justement étudié les systèmes qui satisfont à la condition (13), et il a fait voir que leur recherche se ramène à celle d'une fonction V des trois variables ρ, ρ_1, ρ_2, fonction qui est définie par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d_2 V}{d\rho d\rho_1} = \left(\frac{dV}{d\rho} + P\right)\left(\frac{dV}{d\rho_1} + Q\right),$$

dans laquelle P et Q sont des fonctions de ρ et ρ_1 seulement et ne contiennent pas ρ_2.

5. Soit

$$f(x, y, z) = \frac{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - R^2}{Ax + By + Cz + D},$$

$$f_1(x, y, z) = \frac{(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 + (z-c_1)^2 - R_1^2}{Ax + By + Cz + D}.$$

Considérant alors les deux familles de sphères

$$f(x, y, z) = \mu,$$
$$f_1(x, y, z) = \nu,$$

on obtient sans difficulté

$$\sum\left(\frac{df}{dx}\right)^2 = \frac{(A^2+B^2+C^2)\mu^2+4(Aa+Bb+Cc+D)\mu+4R^2}{(Ax+By+Cz+D)^2},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\sum\left(\frac{df_1}{dx}\right)^2}{\sum\left(\frac{df}{dx}\right)^2} = \frac{(A^2+B^2+C^2)\nu^2+4(Aa_1+Bb_1+Cc_1+D)\nu+4R_1^2}{(A^2+B^2+C^2)\mu^2+4(Aa+Bb+Cc+D)\mu+4R^2}.$$

Ce rapport ne dépend que de μ et ν. Comme, d'ailleurs, deux sphères se coupent suivant une ligne de courbure commune, si l'on représente par φ une fonction quelconque, l'équation

$$\varphi[f(x,y,z),\ f_1(x,y,z)] = 0$$

représente une surface engendrée par ses propres lignes de courbure. En laissant la fonction φ arbitraire, on a toute une famille de surfaces analogues. Nous allons étudier cette famille φ.

Toute sphère f passe par un cercle fixe situé dans le plan

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Toute sphère f_1 passe par un autre cercle fixe situé dans le même plan.

Ces deux cercles, situés dans un même plan, se coupent en deux points A et B réels ou imaginaires conjugués.

La courbe génératrice, intersection d'une sphère f et d'une sphère f_1, est un cercle variable assujetti à passer par deux points fixes A et B réels ou imaginaires conjugués. Pour ce motif, nous appellerons toute surface φ une *gyrocyclide*. Le tore est la plus simple de

toutes. On voit tout de suite que, si l'équation

$$\varphi(\mu, \nu) = 0$$

est algébrique et de degré m, l'équation

$$\varphi[f(x, y, z), f_1(x, y, z)] = 0$$

représente une gyrocyclide algébrique qui, en général, est de degré $2m$.

6. Nous savons que les cercles générateurs de toute gyrocyclide constituent sur cette surface une série de lignes de courbure. Un théorème très-simple va nous donner les lignes de courbure de l'autre série. Voici l'énoncé de ce théorème :

Que d'un point quelconque C *de la droite* AB *on mène une tangente* CQ *à l'un des cercles générateurs; que du point* C *comme centre avec* CQ *pour rayon on décrive une sphère. Cette sphère coupera la gyrocyclide suivant une ligne de courbure de la deuxième série.*

En effet, le point C a même puissance par rapport à

Fig. 1.

tous les cercles générateurs, de sorte que, si l'on mène de ce point des tangentes à tous ces cercles, toutes ces

tangentes sont égales, et le lieu des points de contact est l'intersection de la gyrocyclide et d'une sphère ayant pour centre le point C.

Soient P un de ces cercles et Q le point de contact correspondant. Puisque la gyrocyclide coupe l'une des sphères qui ont fourni le cercle générateur P sous un angle qui est constant le long de ce cercle, on peut inscrire à cette gyrocyclide une sphère ayant pour ligne de contact le cercle P et pour centre un point G de la perpendiculaire menée au plan du cercle P par le centre I de ce cercle. Ce fait sera d'ailleurs établi plus loin directement.

Quoi qu'il en soit, constatons que GI est perpendiculaire au plan du cercle P, et IQ à CQ, d'où il suit que GQ est perpendiculaire à CQ.

Or CQ est normale à la sphère qui a pour centre C, GQ est normale à la sphère qui a pour centre G et, par suite, à la gyrocyclide. Ainsi la gyrocyclide et la sphère de centre C se coupent à angle droit tout le long de leur intersection, ce qui établit que cette intersection est une ligne de courbure de la gyrocyclide.

Si tous ces cercles générateurs sont égaux, la gyrocyclide se réduit à un tore, et la seconde série des lignes de courbure se compose aussi de cercles.

7. Cherchons le lieu des centres des cercles de courbure générateurs.

La direction de AB est toujours réelle, ainsi que le milieu O de AB. Prenons AB pour axe des z et le point O pour origine. Supposons d'ailleurs le plan des xy perpendiculaire à AB, et les axes Ox, Oy perpendiculaires entre eux. Posons en outre

$$OA^2 = OB^2 = K,$$

Traitons la question inverse. On donne le lieu des centres dans le plan des xy et les deux points A et B sur l'axe des z équidistants de l'origine. On veut trouver l'équation de la gyrocyclide.

Le lieu des centres est donné en coordonnées rectilignes. On passe aux coordonnées polaires u et ω. Portant alors dans cette équation les valeurs de u et ω tirées des formules (16), on obtient une équation entre μ et ν, qui est l'équation (18) de la gyrocyclide. Remplaçant μ et ν par les valeurs de la formule (17), on aura l'équation de la gyrocyclide sous la forme (19).

Ainsi, pour le tore, l'équation polaire du lieu des centres des cercles générateurs est

$$(22) \qquad u^2 = d^2;$$

or des équations (16) on tire

$$u^2 = \frac{\nu^2}{4(1+\mu^2)}.$$

Portant cette valeur dans l'équation (22), on a pour équation du tore

$$\nu^2 = 4d^2(1+\mu^2),$$

ou encore

$$(x^2+y^2+z^2-\mathrm{K})^2 = 4d^2(x^2+y^2).$$

8. La construction de la surface se ramène sans difficulté à celle de la courbe lieu des centres des cercles générateurs.

Soit en effet r le rayon du cercle générateur I. On a

$$r^2 = u^2 + \mathrm{K}.$$

Si donc on suppose la courbe lieu des centres déjà tracée, on aura sans peine la surface en construisant le cercle r pour chaque point I de cette courbe.

et, en désignant par φ une fonction arbitraire, l'équation générale des gyrocyclides engendrées par les cercles qui passent en A et B est

$$\varphi(\mu, \nu) = 0, \tag{18}$$

ou bien

$$\varphi\left(\frac{y}{x}, \frac{x^2 + y^2 + z^2 - K}{x}\right) = 0, \tag{19}$$

ou encore

$$F(x, y) = 0. \tag{20}$$

Si l'équation d'une gyrocyclide est donnée sous la forme (18) ou (19), le lieu des centres s'obtient sans difficulté. On n'a qu'à remplacer dans l'équation (18) μ et ν par leurs valeurs (16). L'équation polaire du lieu des centres est ainsi

$$\varphi\left(\operatorname{tang}\omega, \frac{2u}{\cos\omega}\right) = 0,$$

et son équation rectiligne

$$\varphi\left[\frac{y}{x}, \frac{2(x^2 + y^2)}{x}\right] = 0. \tag{21}$$

L'équation (21) prouve que, pour avoir le lieu des centres, il suffit, dans l'équation (19) de la gyrocyclide, de remplacer z par zéro, et $-$ K par $x^2 + y^2$.

L'équation (21) fait voir aussi que, si la gyrocyclide est algébrique, la courbe lieu des centres est algébrique et du même degré.

Si l'équation de la gyrocyclide est donnée sous la forme (20), pour avoir le lieu des centres, on remplacera aussi dans l'équation (20) z par zéro, et $-$ K par $x^2 + y^2$.

Le problème est donc complétement résolu.

c'est-à-dire que $dr > du$. Alors le volume limité par la gyrocyclide et par deux plans voisins menés par AB, et faisant entre eux un angle $\Delta\omega$, est compris entre deux fractions de tore, de telle façon qu'en désignant ce volume par ΔV on a

$$\pi r^2 . 2\pi u \frac{\Delta\omega}{2\pi} < \Delta V < \pi(r + \Delta r)^2 \, 2\pi(u + \Delta u) \frac{\Delta\omega}{2\pi},$$

d'où l'on conclut

$$dV = \pi r^2 u d\omega = \pi(u^2 - b^2) u d\omega.$$

Le volume compris entre deux plans menés par AB est donc

$$V = \pi \int_\alpha^\beta (u^2 - b^2) u d\omega.$$

Si la courbe lieu des centres est simple, on calcule aisément cette intégrale. Cela arrive en particulier si cette courbe est une spirale.

10. Nous avons constaté qu'on pouvait circonscrire une sphère à la gyrocyclide le long de chaque cercle générateur. Il en résulte que toute gyrocyclide peut être envisagée comme l'enveloppe d'une sphère variable. Nous allons étudier la surface à ce nouveau point de vue.

Deux cercles générateurs quelconques sont sur une même sphère bitangente à la surface aux points A et B. Si leurs plans se confondent, cette sphère bitangente devient tangente à la surface tout le long du cercle générateur.

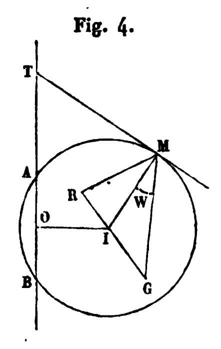
De là une nouvelle démonstration de ce fait que les cercles générateurs forment une première série de lignes de courbure, et aussi que l'on peut trouver une sphère tangente à la surface le long de chaque cercle géné-

rateur, remarque qui donne aussitôt les lignes de courbure de la seconde série.

Les sphères tangentes à la surface le long de chaque cercle générateur passent toutes par les points A et B réels ou imaginaires et ont pour lieu de leurs centres une courbe située dans un plan perpendiculaire au milieu de AB.

Soit I le centre de l'un des cercles. La sphère tangente à la surface le long de ce cercle aura son centre G

Fig. 4.



sur une perpendiculaire menée par I au plan du cercle. Le carré du rayon de cette sphère sera

$$\overline{GA}^2 \text{ ou bien } \overline{GO}^2 + K.$$

Si l'on imagine une sphère ayant pour centre O, et pour carré du rayon $-K$, cette sphère sera évidemment orthogonale à la précédente. Elle sera imaginaire si les points A et B sont réels, et réelle si les points A et B sont imaginaires.

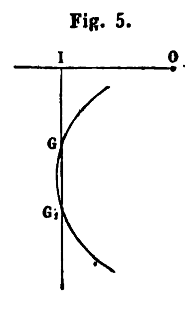
Ainsi, la gyrocyclide est l'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit une courbe plane et qui passe en outre par deux points fixes réels ou imaginaires conjugués, symétriques par rapport au plan de cette courbe.

On bien encore la gyrocyclide est l'enveloppe d'une

sphère dont le centre décrit une courbe plane et qui reste orthogonale à une sphère réelle ou imaginaire dont le centre est dans le plan de la courbe.

11. Désignons par (B) la courbe lieu des points I, centres des cercles générateurs, et par (C) la courbe lieu des points G, centres des sphères enveloppées.

Fig. 5.



Soient G et G_1 deux points voisins de la courbe (C). Ces deux points sont les centres de deux sphères. Ces deux sphères se coupent suivant un cercle dont le plan est perpendiculaire à GG_1 et dont le centre est sur GG_1. Comme, d'autre part, le plan de ce cercle passe par A et par B, aussi bien que les sphères, son centre doit être le pied I de la perpendiculaire abaissée du point O sur GG_1.

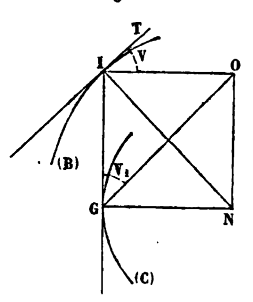
Si alors on considère que GG_1 est une tangente à la courbe (C), on voit que la courbe (B), lieu du point I, est la podaire de la courbe (C) par rapport au point O. Si donc la courbe (C) est de classe p, la courbe (B) sera en général d'ordre $2p$. Si la courbe (C) est une conique, la courbe (B) et la surface seront en général du quatrième ordre.

12. Étudions à ce propos quelques propriétés des podaires.

Soit G un point quelconque de la courbe (C) et la

tangente en ce point. Du point fixe O abaissons une perpendiculaire OI sur cette tangente : le lieu des points I est la courbe (B), podaire de la courbe (C).

Fig. 6.



Soient $u = \mathrm{OI}$ et ω l'angle de OI avec une droite fixe. L'équation polaire de la courbe (B) est une relation entre u et ω, et il est clair que GI est une fonction de u et de ω. On trouve sans peine $\mathrm{GI} = \frac{du}{d\omega}$. Il n'y a pour cela qu'à considérer la courbe (C) comme l'enveloppe des droites IG, obtenues comme il suit. On joint le point O aux divers points I de la courbe (B), et par chaque point I on élève à OI une perpendiculaire.

Cette formule simple

$$\mathrm{GI} = \frac{du}{d\omega}$$

peut s'interpréter géométriquement de bien des manières.

Soit V l'angle du rayon vecteur OI avec la tangente en I à la courbe (B). Soient, en outre,

$$\mathrm{OG} = u_1, \quad \mathrm{OGI} = \mathrm{V}_1.$$

On sait que

$$\operatorname{tang} \mathrm{V} = \frac{u}{\frac{du}{d\omega}}.$$

sphère dont le centre décrit une cour
reste orthogonale à une sphère ré
dont le centre est dans le plan de la

11. Désignons par (B) la c[illegible] centres des cercles générat[illegible] [illegible]pondants des deux courbes lieu des points G, centres [illegible] [illegible]ngle avec le rayon vecteur. [illegible] la longueur IG est la sous-[illegible] B au point I; d'où la construc-[illegible] point G. On mène ON et IG, per-[illegible] ainsi que la normale IN au point I [illegible] complète le rectangle IONG. Le som-[illegible] O est le point G. [illegible] traduire autrement la formule

$$IG = \frac{du}{d\omega};$$

[illegible] ds et ds_1 les longueurs de deux arcs infini-[illegible] I et en G, on a

$$du = ds \cos V,$$
$$du_1 = ds_1 \cos V_1,$$

[illegible] $V = V_1$,

$$\frac{du}{du_1} = \frac{ds}{ds_1}.$$

12. La section normale faite dans la gyrocyclide par le plan TMG (*fig.* 4) est une section principale. En appliquant le théorème de Meunier au cercle généra-[illegible], on voit que MG est le rayon de courbure de cette section principale. La valeur de MG, qui est aussi le rayon de la sphère enveloppée, se calcule d'ailleurs sans peine :

$$\overline{MG}^2 = (u^2 + K) + \left(\frac{du}{d\omega}\right)^2,$$

ou encore

$$\overline{MG}^2 = u_1^2 + K.$$

En désignant par w l'angle GMI, on a évidemment

$$\tang w = \frac{\frac{du}{d\omega}}{\sqrt{u^2 + K}}.$$

L'équation qui caractérise les gyrocyclides pour lesquelles cet angle w est constant est, d'après cela,

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 + K}} = A\,d\omega,$$

d'où l'on tire

$$u = \frac{C}{2} a^{\omega} - \frac{K}{2C} a^{-\omega},$$

C étant une constante arbitraire et a étant égal à e^A.

Cette équation définit les gyrocyclides considérées.

14. Les gyrocyclides du quatrième ordre sont des enveloppes de sphères dont les centres sont sur une conique et qui restent orthogonales à une sphère fixe ayant son centre dans le plan de la conique, et dont le carré du rayon est $-$ K.

Prenons pour axes de coordonnées les axes de la conique et une droite menée par son centre perpendiculairement à son plan. La conique est représentée alors par les équations

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 1.$$

Nous supposerons $A - B > 0$, et aussi $A > 0$, et nous appellerons $\sqrt{A}$ le *demi-grand* axe.

Le centre de la sphère donnée a pour coordonnées $x = a$, $y = b$, $z = 0$.

Dans ces conditions, on trouve facilement l'équation de l'enveloppe des sphères. Cette équation est

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} &(x^2+y^2+z^2-a^2-b^2-\mathrm{K})^2 \\ &\quad = 4\mathrm{A}(x-a)^2+4\mathrm{B}(y-b)^2. \end{aligned}\right.$$

La seconde série de lignes de courbure se compose de cycliques.

15. Pour $b=0$, la surface a un second plan de symétrie, et son équation devient

$$(23)\qquad (x^2+y^2+z^2-a^2-\mathrm{K})^2 = 4\mathrm{A}(x-a)^2+4\mathrm{B}y^2.$$

Il est naturel de chercher si, dans certains cas, ces deux plans de symétrie ne jouent pas le même rôle. Remarquons à cet effet que l'équation précédente peut s'écrire

$$\begin{aligned} &(x^2+y^2+z^2-a^2-\mathrm{K}-2\mathrm{B}) \\ &\quad = 4\mathrm{A}(x-a)^2+4\mathrm{B}y^2 \\ &\qquad -4\mathrm{B}(x^2+y^2+z^2-a^2-\mathrm{K})+4\mathrm{B}^2, \end{aligned}$$

ou bien

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} &(x^2+y^2+z^2-a^2-\mathrm{K}-2\mathrm{B})^2 \\ &\quad = 4(\mathrm{A}-\mathrm{B})x^2-8\mathrm{A}ax \\ &\qquad +4(\mathrm{A}+\mathrm{B})a^2+4\mathrm{KB}+4\mathrm{B}^2-4\mathrm{B}z^2. \end{aligned}\right.$$

y et z n'auront fait que changer de rôle dans les équations (23) et (24), si le second membre de cette dernière, abstraction faite du terme en z^2, est un carré parfait en x, c'est-à-dire si l'on a

$$(25)\qquad \mathrm{B}a^2 = (\mathrm{A}-\mathrm{B})(\mathrm{B}+\mathrm{K}).$$

Il est facile de traduire cette condition géométriquement : elle signifie que la sphère donnée est bitangente

à la conique donnée; la corde des contacts a pour équations

$$(26)\qquad z=0,\quad x=\frac{Aa}{A-B}.$$

Pour la valeur de K, fournie par l'équation (25), l'équation (24) s'écrit

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned}&\left(x^2+y^2+z^2-a^2-\frac{Ba^2}{A-B}-B\right)^2\\ &\qquad=4(A-B)\left[x-\frac{Aa}{A-B}\right]^2-4Bz^2,\end{aligned}\right.$$

ce qui prouve que la gyrocylide est aussi l'enveloppe de sphères dont les centres sont sur la conique réelle

$$y=0,\quad \frac{x^2}{A-B}-\frac{z^2}{B}=1,$$

et qui restent orthogonales à une sphère fixe ayant pour centre

$$x=\frac{Aa}{A-B},\quad y=0,\quad z=0,$$

et dont le carré du rayon est facile à trouver. Considérons pour cela l'équation (23), où le carré du rayon s'obtient en prenant la partie constante qui est dans la parenthèse du premier membre, et en lui ajoutant le carré de l'abscisse du centre a.

Opérant de même dans l'équation (27), c'est-à-dire ajoutant à la partie constante qui est dans la parenthèse du premier membre le carré de l'abscisse du centre $\frac{Aa}{A-B}$, on obtient pour carré du rayon de la sphère fixe

$$-a^2-\frac{Ba^2}{A-B}-B+\frac{A^2a^2}{(A-B)^2}.$$

Remarquons que le centre de la seconde sphère est

sur la corde des contacts de la première conique et de la première sphère.

On voit ainsi que la surface, pour la valeur de K donnée par l'équation (25), est susceptible d'un second mode de génération absolument analogue au premier. La seconde série de lignes de courbure se compose donc de cercles générateurs coupant tous aux mêmes points la droite

$$z = 0, \quad x = \frac{Aa}{A - B},$$

c'est-à-dire la corde des contacts de la première conique et de la première sphère. Les points fixes de ces nouveaux cercles sont d'ailleurs les points de contact.

En d'autres termes, pour la valeur de K donnée par l'équation (25), on a la surface de Charles Dupin. On pourrait l'appeler la *digyrocyclide*.

On s'assurera aisément que, dans la digyrocyclide, la première conique et la première sphère d'une part, et d'autre part la deuxième conique et la deuxième sphère, jouent absolument un rôle réciproque. Ainsi les foyers de l'une des coniques sont les sommets de l'autre.

16. Si, au lieu de supposer $b = 0$, on avait supposé $a = 0$, on serait arrivé au même résultat, mais la deuxième conique eût été imaginaire.

Si l'on suppose $a = b = 0$, les résultats précédents subsistent, mais ils deviennent un peu plus simples.

Enfin, si l'on a en même temps

$$a = b = 0 \quad \text{et} \quad A = B,$$

on obtient

$$(x^2 + y^2 + z^2 - K)^2 = 4A(x^2 + y^2),$$

ce qui est le tore.

17. Examinons un autre cas intéressant : soit la conique fixe

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Posons, comme d'habitude,

$$a^2 - b^2 = c^2,$$

soit α le rayon de la sphère fixe, que l'on suppose réelle, et soient $x = c$, $y = 0$, $z = 0$ les coordonnées de son centre. La gyrocyclide enveloppe a dès lors pour équation

$$(x^2 + y^2 + z^2 - c^2 + \alpha^2)^2 = 4a^2(x - c)^2 + 4b^2y^2.$$

La podaire de la conique, lieu des centres des cercles générateurs, est, dans ce cas, très-simple. C'est le cercle

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Transportant l'origine au centre de la sphère fixe, et transformant en polaires, on a pour équation de ce cercle

$$(28) \qquad u^2 + 2(c\cos\omega)u - b^2 = 0.$$

Le volume de la gyrocyclide étant désigné par V, on sait que l'on a

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{V} = \int_0^\pi (u^2 - \alpha^2)\, u\, d\omega.$$

Faisant le changement de variable indiqué par l'équation (28), on a

$$(29) \quad \tfrac{1}{2}\mathrm{V} = \int_{a-c}^{a+c} \frac{(u^2 - \alpha^2)(u^2 + b^2)\,du}{\sqrt{(2cu + b^2 - u^2)(2cu - b^2 + u^2)}}.$$

Ainsi le volume dépend d'une intégrale elliptique.

Transformons homographiquement cette gyrocyclide

en posant

$$x = m\,X + n\,Y + p\,Z + q,$$
$$y = m_1X + n_1Y + p_1Z + q_1,$$
$$z = m_2X + n_2Y + p_2Z + q_2.$$

Nous avons ainsi une nouvelle surface du quatrième ordre, qui est une des surfaces étudiées par M. Kummer (*Journal de Crelle*).

Tous les plans représentés par l'équation suivante :

$$m_1X + n_1Y + p_1Z + q_1 = \lambda(mX + nY + pZ + q)$$

coupent cette surface suivant deux coniques, et toutes ces coniques coupent en deux points indépendants de λ la droite représentée par les équations suivantes :

$$m_1X + n_1Y + p_1Z + q_1 = 0,$$
$$m\,X + n\,Y + p\,Z + q = 0.$$

Le volume limité par cette nouvelle surface s'obtient en combinant la formule (29) avec une formule que nous avons donnée dans un travail antérieur (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1873). On obtient ainsi

$$\frac{1}{2}V_1 = \begin{vmatrix} m & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \int_{a-c}^{a+c} \frac{(u^2-\alpha^2)(u^2+b^2)\,du}{\sqrt{(2cu+b^2-u^2)(2cu-b^2+u^2)}}.$$

ERRATUM.

Question 1244, p. 335, ligne 7, au lieu de m, n, p, il faut p, m, n.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

[SUITE (*).]

THÉORÈMES DE CAUCHY ET DE LAURENT.

Nous terminerons ces considérations préliminaires en donnant, d'après Cauchy et le commandant Laurent, une nouvelle forme au théorème de Maclaurin.

Soit $f(x)$ une fonction finie continue monodrome et monogène à l'intérieur d'un cercle de rayon R décrit de l'origine comme centre. Elle sera développable par la formule de Maclaurin pour toute valeur de x comprise à l'intérieur du cercle en question.

En effet, si l'on décrit un cercle de rayon R′ un peu plus petit que R de l'origine comme centre, on aura, en intégrant le long de ce cercle,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{f(z)}{z-x} dz,$$

pourvu que le point x soit situé dans son intérieur; alors le module de z sera plus grand que celui de x et, $\frac{1}{z-x}$ étant développé suivant les puissances de x, on aura

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int f(z)\, dz \left(\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \ldots\right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \left[\int \frac{f(z)}{z} dz + x \int \frac{f(z)}{z^2} dz + x^2 \int \frac{f(z)}{z^3} dz + \ldots \right. \\ &\qquad \left. + x^n \int \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz + \ldots \right]. \end{aligned}$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVI, p. 78, 211.

Or on sait que

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz = \frac{f^n(0)}{1.2.3\ldots n};$$

on aura donc

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \ldots + \frac{x^n}{1.2\ldots n}f^n(0) + \ldots;$$

ce qu'il fallait prouver.

Si la fonction $f(x)$ est finie, continue, monodrome et monogène à l'intérieur d'une couronne circulaire de rayons R *et* R′, *ayant son centre à l'origine, elle sera développable pour toutes les valeurs de x comprises dans cette couronne en une double série procédant suivant les puissances entières ascendantes et descendantes de x.*

En effet, soit $\int_A$ un signe d'intégration indiquant que la variable reste sur un cercle de rayon A décrit de l'origine comme centre, soit r un peu plus petit que R, et r' un peu plus grand que R′, la somme

$$\int_r \frac{f(z)}{z-x}dz - \int_{r'}\frac{f(z')}{z'-x}dz'$$

sera égale à l'intégrale $\int\frac{f(z)}{z-x}dz$ prise le long d'un cercle de rayon très-petit décrit autour du point x intérieur à la couronne; en sorte que, si l'on observe que celle-ci est égale à $2\pi\sqrt{-1}f(x)$, on aura

$$\int_r \frac{f(z)}{z-x}dz - \int_{r'}\frac{f(z')}{z'-x}dz' = 2\pi\sqrt{-1}f(x),$$

ou bien, en observant que mod. $z >$ mod. x et que

mod. $z' <$ mod. x,

$$\int_r f(z)\,dz\left(\frac{1}{z}+\frac{x}{z^2}+\frac{x^2}{z^3}+\cdots\right)$$
$$+\int_{r'} f(z')\,dz'\left(\frac{1}{x}+\frac{z'}{x^2}+\frac{z'^2}{x^3}+\cdots\right)=2\pi\sqrt{-1}\,f(z);$$

ce qui démontre le théorème.

Exemples. — $\log(1+x)$ est développable à l'intérieu d'un cercle de rayon 1 décrit de l'origine comme centre, maîs il cesse d'être développable au delà comme l'on sait, et, en effet, pour $x=-1$, le logarithme de $1+x$ est infini.

Le point critique de $(1-x)^m$ est $x=1$, c'est ce qui explique pourquoi la formule du binôme cesse d'avoir lieu quand le module de x est supérieur à l'unité, etc.

REMARQUE CONCERNANT LES FONCTIONS PÉRIODIQUES.

Une fonction $f(x)$ possède la période ω quand on a

$$f(x+\omega)=f(x)$$

et, par suite, n étant entier,

$$f(x+n\omega)=f(x).$$

$e^{\frac{2\pi}{\omega}x\sqrt{-1}}$ possède évidemment la période ω; quand on donne une valeur particulière à $e^{\frac{2\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}$, il en résulte pour x une série de valeurs de la forme $x_0+n\omega$, n désignant un entier et x_0 un nombre bien déterminé. Si donc on considère une fonction $f(x)$ monodrome quelconque possédant la période ω, elle pourra être considérée comme fonction de $y=e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}x}{\omega}}$ et, si l'on se donne y, x ayant les va-

leurs $x_0 + n\omega$, $f(x)$ prendra les valeurs

$$f(x_0 + n\omega) = f(x_0).$$

Ainsi, y étant donné, $f(x)$ aura une valeur unique et bien déterminée; il en résulte que $f(x)$ est fonction monodrome de y.

Il résulte de là que *toute fonction périodique monodrome possédant la période ω pourra se développer suivant les puissances ascendantes et descendantes de $e^{\frac{2\pi}{\omega}x\sqrt{-1}}$ à l'intérieur de certaines couronnes circulaires.*

Mais quand $e^{\frac{2\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}$ décrit un cercle, son module reste constant; or, si l'on pose

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad \omega = g + h\sqrt{-1},$$

il se réduit à

$$e^{\frac{2\pi\mu}{g^2+h^2}},$$

μ désignant une fonction linéaire de α et β, et pour que cette expression reste constante, μ doit rester constant; x décrit donc une droite, de direction fixe d'ailleurs, quand on fait varier le module de $e^{\frac{2\pi x\sqrt{-1}}{\omega}}$. Ainsi c'est entre deux droites parallèles que le développement de $f(x)$ sera possible, l'une de ces droites ou même toutes les deux pouvant s'éloigner à l'infini.

Ce théorème nous servira à jeter les fondements de la théorie des fonctions elliptiques.

NOTIONS SUR LES FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

Une fonction y, définie par une équation de la forme

$$f(y, x) = 0,$$

où $f(x, y)$ désigne un polynôme entier en x et y, qui n'admet pas de diviseur entier, est ce que l'on appelle une *fonction algébrique*. L'équation qui la définit est dite *irréductible*.

Une fonction ainsi définie est susceptible d'autant de valeurs pour une même valeur de x qu'il y a d'unités dans le degré de f pris relativement à y; mais ces valeurs ne peuvent pas être séparées les unes des autres et ne constituent qu'une seule et même fonction, ainsi que l'a démontré M. Puiseux.

1° Une fonction algébrique ne peut s'annuler que si le dernier terme de l'équation qui la définit s'annule, et, par suite, elle n'a qu'un nombre limité de zéros. — $\frac{1}{y}$ est défini par une équation algébrique que l'on sait former et n'admet, par suite, qu'un nombre limité de zéros; donc y n'admet qu'un nombre limité d'infinis qui sont les racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le coefficient de la plus haute puissance de y dans l'équation qui sert à le définir.

2° Nous admettrons que y soit une fonction continue de x, excepté pour les points où y devient infini ou acquiert des valeurs telles que l'on ait à la fois

$$f(x, y) = 0, \quad \frac{df}{dy} = 0;$$

encore en ces points n'y a-t-il pas, à proprement parler, discontinuité, mais simplement indétermination d'une certaine espèce dont nous parlerons plus loin; nous donnerons à ces points le nom de *points critiques*.

Nous supposons ce théorème connu du lecteur, et, en réalité, il est supposé connu de toutes les personnes qui s'occupent de Calcul différentiel; il est impossible de prendre la dérivée d'une fonction implicite sans l'admettre.

3° La fonction algébrique y admet une dérivée bien déterminée en tout point qui n'est pas critique : cela résulte de la règle de la différentiation des fonctions implicites, et l'on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{df}{dx} : \frac{df}{dy},$$

expression finie et déterminée si $\frac{df}{dy}$ n'est pas nul.

4° La fonction algébrique y est monodrome à l'intérieur de tout contour ne contenant pas de point critique. Considérons, en effet, un contour fermé C ne contenant aucun point critique ; supposons que la variable x décrive un certain chemin continu à l'intérieur de C, en partant du point x_0 pour y revenir. Soient S ce chemin, y_0 la valeur de y en x_0 au départ, et y_1 la valeur que prend y quand x revient en x_0. Si l'on n'a pas $y_1 = y_0$, y_1 ne pourra être qu'une des valeurs de y. Cela posé, déformons le chemin S en le réduisant à des dimensions de plus en plus petites. Quand ce chemin se sera, dans toutes ses parties, suffisamment rapproché de x_0, les valeurs de y le long du contour S seront, en vertu de la continuité de y, aussi peu différentes que l'on voudra de y_0, et, par suite, différeront de y_1 d'une quantité finie, puisque, à l'intérieur du contour C dans lequel nous cheminons, les valeurs de y sont nettement distinctes ; donc, quand le contour S sera devenu suffisamment petit, y reviendra en x_0 avec sa valeur initiale y_0. Mais, s'il n'en est pas toujours ainsi, il est clair que, pendant que le contour S se déforme, il arrive un moment où y revient encore en x_0 avec la valeur y_1 différente de y_0, tandis qu'un moment après il reviendra avec la valeur primitive y_0. Soient donc deux contours S_0 et S_1, infiniment voisins, ramenant y l'un avec la valeur y_0, l'autre avec la valeur y_1 ; considérons deux mobiles parcourant

ces contours en restant toujours infiniment voisins l'un de l'autre : en deux points infiniment voisins, y ne pourra avoir que des valeurs infiniment peu différentes. En effet, si l'on considère, à chaque instant, la différence des valeurs de y en deux points correspondants, cette différence, d'abord infiniment petite, restera telle, car elle varie d'une manière continue comme y, et elle ne saurait devenir finie que si l'on considère deux racines distinctes de l'équation $f(x, y) = 0$; mais, pour passer d'une valeur à une autre, y serait obligé de rompre la continuité, à moins que l'on ne soit précisément dans le voisinage d'un point critique où deux valeurs distinctes de y sont susceptibles de différer infiniment peu l'une de l'autre pour une même valeur de x. Ainsi donc, y revient toujours en x_0, avec la même valeur y_0, si l'on ne sort pas du contour C. C. Q. F. D.

Discussion de la fonction $\sqrt{x - a}$.

Il est intéressant d'étudier la manière dont les fonctions algébriques permutent leurs valeurs les unes dans les autres autour des points critiques; nous renverrons, pour cet objet, le lecteur à un Mémoire de M. Puiseux, inséré au t. XV du *Journal de M. Liouville*. Il suffira, en effet, pour le but que nous avons en vue, de discuter les fonctions de la forme $\sqrt{X}$, où X représente un polynôme entier en x.

Commençons par la fonction $y = \sqrt{x - a}$, dans laquelle a est une constante. Cette fonction a deux valeurs

$$+\sqrt{x - a} \quad \text{et} \quad -\sqrt{x - a},$$

en chaque point égales et de signes contraires. Nous n'avons à considérer qu'un seul point critique, le point a

pour lequel les deux valeurs de y deviennent égales à zéro. La fonction y ne cesse donc d'être monodrome qu'à l'intérieur d'un contour contenant le point a.

Posons

$$x = a + re^{\theta\sqrt{-1}},$$

$re^{\theta\sqrt{-1}}$ sera représenté par la droite qui va du point a au point x (la résultante de deux droites représentant, il ne faut pas l'oublier, la somme des imaginaires représentées par ces droites); on aura

$$\sqrt{x-a} = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}.$$

Si le point x décrit un contour fermé contenant le point a, la droite $re^{\theta\sqrt{-1}}$ joignant le point a au point x tournera en décrivant un angle total égal à 2π; la fonction

$$\sqrt{x-a} = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\theta}{2}\sqrt{-1}}$$

reviendra alors, quand x reviendra au point de départ correspondant à $\theta = \theta_0$, avec la valeur

$$-\sqrt{x-a} = r^{\frac{1}{2}} e^{\left(\frac{\theta_0}{2}+\pi\right)\sqrt{-1}}.$$

Ainsi l'effet d'une rotation autour du point a est de changer le signe de la fonction y.

DISCUSSION DE LA FONCTION

$$\sqrt{A(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-l)}.$$

Quand le point x tournera autour du point a, $\sqrt{x-a}$ changera de signe; ainsi :

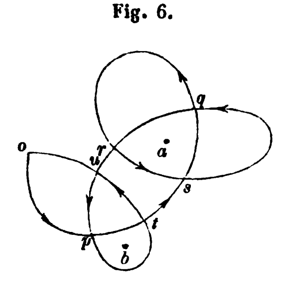
Quand la variable décrira un contour fermé contenant une des quantités $a, b, \ldots, l$, la fonction reviendra au point de départ avec un changement de signe.

Quand la variable décrira un contour fermé contenant un nombre pair de points critiques, un nombre pair de facteurs $\sqrt{x-a}$, $\sqrt{x-b}$, ... *changeront de signes, et la fonction reviendra au point de départ avec sa valeur initiale; ce sera l'inverse quand le contour contiendra un nombre impair de points critiques.*

Au lieu de décrire un contour formé d'un contour simple, la variable peut tourner plusieurs fois autour d'un ou de plusieurs points critiques; mais ce cas complexe ne présentera aucune difficulté et se ramènera aux précédents.

Je suppose, par exemple, un contour ayant son origine en *o* et présentant la forme ci-dessous : quand la

Fig. 6.



variable a suivi le chemin *opts*, la fonction arrive en *s* avec une valeur que j'appellerai $y_{\prime}$, et quand x parcourt le chemin *sqrs*, y revient en *s* avec la valeur $-y_{\prime}$, en sorte que l'on pourrait supprimer la boucle *sqrs* et partir de *o* avec la valeur $-y_0$; on pourrait de même supprimer la boucle *uptu* en partant avec la valeur initiale $+y_0$; il reste alors le chemin *optsqruo* qui contient le point *a* et l'on revient en *o* avec la valeur $-y_0$.

(*A suivre.*)

SUR LES CHIFFRES QUI TERMINENT LES PUISSANCES DES NOMBRES ENTIERS;

PAR M. DÉSIRÉ ANDRÉ.

I.

THÉORÈME. — *Quels que soient les nombres entiers* A, B, k, n, *si* A *et* B *sont terminés par les mêmes* k *derniers chiffres, il en est de même de* A^n *et* B^n.

En effet, par hypothèse, la différence des deux nombres A et B est terminée par k zéros. Il en est de même de la différence des deux nombres A^n et B^n, puisque cette seconde différence est divisible par la première.

Corollaire. — Les k derniers chiffres de la puissance $n^{ième}$ d'un nombre quelconque ne dépendent que des k derniers chiffres de ce nombre.

Corollaire. — Dans la suite indéfinie des puissances $n^{ièmes}$ des nombres entiers consécutifs, les puissances, prises de 10^k en 10^k, sont terminées par les mêmes k derniers chiffres.

II.

THÉORÈME. — *Quels que soient les nombres entiers* A, B, k, n, *si la somme des deux nombres* A *et* B *est terminée par* k *zéros,* A^{2n} *et* B^{2n} *sont terminés par les mêmes* k *derniers chiffres.*

En effet, la différence des deux nombres A^{2n} et B^{2n} est terminée par k zéros, puisqu'elle est divisible par la somme des deux nombres A et B.

Corollaire. — Dans la suite des puissances d'exposant $2n$ des $10^k - 1$ premiers nombres entiers, deux puissances quelconques, prises à égales distances des extrêmes, sont terminées par les mêmes k derniers chiffres.

III.

Théorème. — *Quels que soient les nombres entiers* A, B, k, n, *si la somme des deux nombres* A *et* B *est terminée par* k *zéros, il en est de même de la somme des deux nombres* A^{2n+1} *et* B^{2n+1}.

On sait, en effet, que la seconde somme est exactement divisible par la première.

Corollaire. — Dans la suite des puissances d'exposant $2n+1$ des $10^k - 1$ premiers nombres entiers, deux puissances quelconques, prises à égales distances des extrêmes, ont une somme terminée par k zéros.

IV.

Les trois théorèmes précédents, ainsi que les corollaires qui les accompagnent, sont vrais dans tous les systèmes de numération. Il faut donc, dans l'énoncé de chacun d'eux, regarder le groupe 10 comme représentant, non point en particulier le nombre 10, mais bien en général l'unité du second ordre du système de numération que l'on considère, ou, en d'autres termes, la base même de ce système de numération.

V.

Si l'on nomme *polynôme complet* un polynôme ordonné, où la différence des exposants de la lettre ordonnatrice dans deux termes consécutifs est constamment égale à l'unité, les trois théorèmes d'Arithmétique précédents peuvent être rapprochés des trois théorèmes d'Al-

gèbre suivants, qui leur sont très-analogues par leurs énoncés et qui pourraient se démontrer par les mêmes moyens.

Théorème. — *Si deux polynômes quelconques* P *et* Q, *entiers, complets et ordonnés de la même manière par rapport à la même lettre, sont tels que leurs k derniers termes soient égaux chacun à chacun, il en est de même des k derniers termes des deux polynômes* P^n *et* Q^n.

Théorème. — *Si deux polynômes quelconques* P *et* Q, *entiers, complets et ordonnés de la même manière par rapport à la même lettre, sont tels que leurs k derniers termes soient respectivement égaux et de signes contraires, les k derniers termes des deux polynômes* P^{2n} *et* Q^{2n} *sont égaux chacun à chacun.*

Théorème. — *Si deux polynômes quelconques* P *et* Q, *entiers, complets et ordonnés de la même manière par rapport à la même lettre, sont tels que leurs k derniers termes soient respectivement égaux et de signes contraires, les k derniers termes des deux polynômes* P^{2n+1} *et* Q^{2n+1} *sont aussi égaux et de signes contraires respectivement.*

SUR UNE APPLICATION DES DÉTERMINANTS;

Par M. V. JAMET,
Professeur au lycée de Saint-Brieuc.

On rencontre fréquemment en Géométrie analytique l'identité suivante :

$$(a^2+b^2+c^2)(a'^2+b'^2+c'^2)-(aa'+bb'+cc')^2$$
$$=(bc'-cb')^2+(ca'-ac')^2+(ab'-ba')^2.$$

Je me propose de la vérifièr au moyen des détermi-nants. Soit

$$(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ bc' - cb' & ca' - ac' & ab' - ba' \end{vmatrix} = \Delta.$$

Remarquons d'abord que

$$(bc' - cb')a + (ca' - ac')b + (ab' - ba')c = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

De même

$$(bc' - cb')a' + (ca' - ac')b' + (ab' - ba')c' = 0.$$

Par suite, en élevant le déterminant Δ au carré, il vient

$$\Delta^2 = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & aa' + bb' + cc' & 0 \\ aa' + bb' + cc' & a'^2 + b'^2 + c'^2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{vmatrix},$$

d'où

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & aa' + bb' + cc' \\ aa' + bb' + cc' & a'^2 + b'^2 + c'^2 \end{vmatrix}.$$

C. Q. F. D.

CORRESPONDANCE.

Encore la tachymétrie; par M. Casimir Rey. — Je maintiens mes appréciations relatives au *Panorama de la Géométrie*. Son auteur me reproche de n'avoir pas

cité son *Cahier d'un Soldat du génie,* qu'il appelle son *œuvre fondamentale,* et que je n'avais pas négligé de lire.

Voici quelques extraits de ce dernier Ouvrage :

Système métrique de la Géométrie naturelle.

« D. Répétez la série des mesures métriques à partir du mètre.

» R. Le mètre, c'est la hauteur de l'homme entre le nombril et la plante des pieds.

» Le décimètre, c'est la plus grande largeur de la main avec le pouce.

» Le centimètre, c'est la moyenne largeur des ongles de la main sans le pouce.

» Le millimètre, c'est dix épaisseurs de cheveu d'homme. »

« *Grand principe d'évidence de la Tachymétrie.* — Les objets qui sortent du même moule sont égaux, *ainsi que leurs moitiés ou leurs doubles, leurs tiers ou leurs triples* (!).

» Les trois formes possibles : équarris, pointus, ronds.

» Le quarré parfait et le quarré long sont partout.

» Le cube est le dé de l'antique jeu de l'oie.

» La pyramide est un mot grec rappelant une pointe de flamme, comme si nous disions flammique ; c'est la forme d'un cornet ou d'un pointu.

» Le cercle est un plan, comme serait une roue sans épaisseur.

» Le cylindre est un cercle doué d'une épaisseur uniforme.

» Le cône est une pyramide qui a pour base un cercle.

» La sphère est une boule, elle a un centre et des rayons. »

« *Cercle et sphère mis en calibre. — L'aire ou surface du cercle a pour mesure la moitié du contour par le rayon.*

» Voici deux beignets d'orange égaux, divisés en triangles égaux dont le sommet est au centre du cercle. Ouvrez-les comme pour les manger. Vous aurez deux images dentées pouvant s'engrener l'une dans l'autre sans vides, et composées d'un ruban qui est le moule d'uniformisation des deux cercles réunis.

$$2 \text{ cercles} = 1 \text{ ruban}, \quad 1 \text{ cercle} = \tfrac{1}{2} \text{ ruban}.$$

» Or, je sais mesurer le ruban, donc je sais mesurer le cercle, à condition de trouver dans le tour et le rayon du cercle la longueur et la largeur du ruban; ce qui se voit d'emblée....

» *Le volume de la sphère est égal au tiers du produit de son enveloppe ou surface par le rayon.*

» L'enveloppe de la sphère est égale à quatre fois l'aire d'un cercle que l'on tracerait au moyen d'un rayon de la sphère. Pour le prouver [on sortirait du but de ces conférences consacrées aux questions d'une utilité journalière (!)], admettons-le ici ; la formule de la sphère à établir est donc

$$\begin{aligned} \text{Sphère, volume} &= \tfrac{1}{3}\,(\text{surface sphère} \times \text{rayon}) \\ &= \tfrac{1}{3}\,(4 \text{ aires de cercle} \times \text{rayon}). \end{aligned}$$

» L'enveloppe de la sphère étant égale à quatre cercles faits sur le rayon sera uniformisée par un plateau formé de quatre planches jointives égales chacune à l'aire d'un cercle. Il ne restera plus qu'à uniformiser toutes les pyramides en hérisson, et pour cela je les implante sur le plateau. Elles seront jointes par les bases et ne laisseront aucun vide. Ainsi implantées, elles présentent l'aspect d'une mâchoire de crocodile sur laquelle il faut

hardiment mettre la main de l'esprit pour les aplatir uniformément au tiers de la hauteur. Alors la mâchoire, c'est-à-dire la sphère, est changée en un plateau comme le tas de sable mis au calibre, et ce plateau a pour hauteur le tiers du rayon. »

« *Résumé de la Tachymétrie.* — En théorie, l'idée vibrante, la seule qui suffise à tout, c'est l'*uniformité*. Donc, le but c'est l'uniformisation obtenue par la division du quarré en quatre triangles égaux, et du cube en six parties égales.

» En pratique, le but, c'est l'assimilation des formules compliquées du cercle par la tolérance; mais la tolérance éclairée par la théorie, pour marcher d'un pas sûr, et limitée dans ses écarts pour ne pas tomber dans de faux comptes. La tolérance est la juste limite entre la rigueur qui complique et l'erreur qui décourage et sème la méfiance. »

Une polémique sur ce livre me semblerait peu intéressante. Grâce à mon article d'octobre 1875, grâce à la réponse de M. Lagout (juin 1877), les *Annales* ont donné une liste à peu près complète des Ouvrages de cet auteur. Donc le lecteur sait ce qu'il doit lire, s'il n'est pas suffisamment édifié sur la valeur de la Tachymétrie.

Extrait d'une lettre de M. Laisant. — La solution de la question 1226, donnée par M. de Virieu (même tome, p. 285), est irréprochable; mais peut-être serait-il plus pratique d'opérer tout simplement comme il suit.

Il s'agit, on le sait, de rendre $\sin x = \frac{\sin a + \sin b}{1 + \sin a \sin b}$ calculable par logarithmes. Si l'on pose $\sin a = \operatorname{tang} \alpha$, $\sin b = \operatorname{tang} \beta$, il vient

$$\sin x = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)}.$$

Extrait d'une lettre de M. Toubin, à Lons-le-Saulnier. — Le problème dit *de la carte,* qui a pour but de déterminer le point d'où deux lignes OA et OB ont été vues sous des angles α et β, se résout ordinairement par l'intersection de deux segments. Cette solution est peu pratique; aussi les livres spéciaux, tels que le *Cours de topographie* de M. Salneuve, l'*Aide-mémoire des officiers d'État-major* y substituent des tâtonnements peu mathématiques. Ne serait-il pas préférable d'opérer comme suit?

Faites en O l'angle $AOI = \alpha - 90°$, et élevez en A la perpendiculaire AI à OA; de l'autre côté, faites de même $BOK = \beta - 90°$ et élevez BK perpendiculaire à OB, joignez IK, le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur IK sera la station cherchée.

En effet, la demi-circonférence décrite sur OI comme diamètre passe par M et A; donc $IMA = IOA$ et, par suite, $OMA = 90 + IOA = \alpha$. De même de l'autre côté.

Ce procédé se prête, aussi bien que la méthode ordinaire, au calcul et à la discussion.

COMPOSITIONS ÉCRITES DONNÉES A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1877.

Concours d'admissibilité.

Composition de Mathématiques.

Première question. — On donne la surface qui, par rapport à un système de plans coordonnés rectangulaires, a pour équation

$$3x^2 - 3y^2 + z^2 - 2yz - 4xz + 8xy - 8x + 6y + 2z = 0.$$

On demande de trouver l'équation de la même surface par rapport à un système de plans principaux.

On admettra comme connue l'équation générale des plans diamétraux, et l'on fera directement sur l'équation donnée les raisonnements et les calculs nécessaires pour la solution de la question proposée.

Seconde question. — Démontrer que dans une équation à coefficients réels, qui a toutes ses racines réelles, le nombre des racines positives est égal au nombre des variations du premier membre ordonné suivant les puissances de l'inconnue. On supposera démontrée la règle des signes de Descartes.

Tracé graphique.

Sphère avec trou cylindrique.

Données. — La sphère (o, o') est tangente aux deux plans de projection; son rayon est de 50 millimètres. Le cylindre est de révolution autour d'un axe $(\omega u, o'u')$ parallèle à la ligne de terre LT; son rayon est de 42 millimètres; enfin il touche la sphère au point de cette surface qui est le plus éloigné du plan vertical de projection.

1° *Recherche de l'intersection de la sphère et du cylindre : qspr*, sphère auxiliaire inscrite au cylindre; pq, rs, projections horizontales des cercles communs à la sphère auxiliaire et aux surfaces données; m, projection horizontale d'un point de l'intersection; m', projection verticale obtenue au moyen du cercle de front $(nm, n'm')$. Points sur le contour apparent vertical de la sphère, (a, a'), (a, a''), (g, g'), (g, g''). Points où la tangente est horizontale, (b, b'), (b, b''), (d, d'), (d, d'').

2° *Projection auxiliaire sur un plan vertical* L_1T_1, tel que le nouveau contour apparent vertical de la sphère

touche les cercles o et o'. Points sur le contour apparent de la sphère, (c, c_1) (c, c_2). Points où la tangente est horizontale, (b, b_1), (b, b_2), (d, d_1), (d, d_2).

Les nombres indiqués dans cette légende pour les rayons du cylindre et de la sphère sont relatifs au croquis-modèle. Pour exécuter leur épure, les élèves augmenteront chacun de ces nombres du tiers de sa valeur; les lignes de construction seront faites à l'encre rouge.

Composition de Physique.

1° Lois du mélange des gaz.
2° Télescope de Newton; son grossissement.

Composition de Chimie.

1° Acide hypochloreux.
2° Oxyde de carbone.
3° Analyse du bioxyde d'azote.

CONCOURS D'ADMISSION.

Composition de Mathématiques.

On donne l'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ d'une hyperbole rapportée à ses axes, et les coordonnées ξ et η d'un point M de son plan.

Par le point M on mène deux tangentes à l'hyperbole la touchant aux points A et B; trouver l'équation du cercle passant par les points A, B et le centre O de l'hyperbole.

Ce cercle rencontre l'hyperbole en deux points C et D distincts de A et de B; trouver l'équation de la droite CD.

Si le point M décrit une droite du plan, aux diverses

positions du point M correspondront diverses positions de la droite CD : quel est le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre de l'hyperbole sur ces droites?

Lavis à l'encre de Chine.

Faire le lavis à l'encre de Chine, d'une surface cylindrique de 10 centimètres de diamètre sur 15 centimètres de hauteur. Ce cylindre devra se détacher sur un fond formé d'une teinte plate grise ; il reposera sur un socle dont la surface plane sera indiquée par une teinte plate d'une très-faible intensité.

Le modèle de cette surface cylindrique pourra être fait à teintes fondues ou adoucies, ou bien à teintes plates superposées.

On admettra que le rayon de lumière a pour projections horizontale et verticale des lignes inclinées à 45 degrés sur la ligne de terre. Le cadre limitant le dessin aura 24 centimètres de haut sur 18 centimètres de large.

Calcul trigonométrique.

Étant donnés dans un triangle deux côtés et l'angle compris, savoir :

$$a = 28319,15$$
$$b = 37402,08$$
$$C = 28^{\circ}15'35'',32,$$

trouver les deux angles A et B, le troisième côté c et la surface S.

Composition française.

Apprécier ces deux vers de Marmontel :

Du devoir il est beau de ne jamais sortir,
Mais plus beau d'y rentrer avec le repentir.

Ne pourrait-on pas dire, au contraire, qu'il est bien de rentrer dans le devoir, mais qu'il est mieux de n'en pas sortir?

L'erreur de Marmontel ne vient-elle pas de ce qu'il a dit *beau* au lieu de *difficile*?

Rien n'est plus difficile à qui s'est laissé glisser sur la pente du mal que de s'y retenir et de triompher de l'habitude, qui devient si vite une seconde nature.

Mais rien n'est plus beau que de ne jamais faillir, tant les occasions, les mauvais conseils, les mauvais exemples, nos passions, nos intérêts, nous poussent à mal faire.

Composition de Géométrie descriptive.

On donne deux points A et B situés sur une droite verticale; le point A est à 6 centimètres au-dessus du plan horizontal de projection, et le point B à 2 centimètres au-dessus du point A.

La verticale AB est l'axe d'un hyperboloïde de révolution; le cercle de gorge a pour centre le point A et pour rayon 4 centimètres; le parallèle P, qui a pour centre le point B, a son rayon égal à 5 centimètres.

On prend sur le cercle P un point C tel que le rayon BC soit incliné à 45 degrés sur le plan vertical de projection; puis on décrit une sphère ayant pour centre le point C et pour rayon 8 centimètres.

On demande de représenter le solide compris entre la surface de l'hyperboloïde, le plan du parallèle P et le plan horizontal de projection, en supposant enlevée la partie de ce corps qui est comprise dans la sphère.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 454

(voir 1re série, t. XVII, p. 434);

PAR M. C. MOREAU,
Capitaine d'Artillerie.

Dans une courbe plane du troisième degré, les trois sommets du triangle des asymptotes et les trois sommets du triangle des tangentes aux points d'inflexion sont sur une même conique. (FAURE.)

Cette proposition, présentée d'une manière aussi générale, n'est pas exacte. Pour que la propriété énoncée soit vraie, il faut que la ligne droite qui joint les trois points d'inflexion considérés soit parallèle à celle qui passe par les trois points où la courbe rencontre ses asymptotes, ce qui n'a pas généralement lieu.

Avec cette hypothèse, voici comment on peut faire la démonstration :

Soient $A = 0$, $A' = 0$, $A'' = 0$ les équations des trois asymptotes et $L = 0$ celle de la droite qui joint les points où la courbe coupe ses asymptotes, l'équation de la courbe du troisième degré considérée prendra la forme

$$(1) \qquad F = AA'A'' + mL = 0.$$

Soient, de même, $T = 0$, $T' = 0$, $T'' = 0$ les équations des tangentes à trois points d'inflexion, en ligne droite, et $I = 0$ celle de la ligne qui joint ces points, F pourra se mettre sous cette autre forme :

$$(2) \qquad F = KTT'T'' + pI^3 = 0.$$

Supposons maintenant que les lignes $L=0$ et $I=0$ soient parallèles et que, pour simplifier, l'axe des y ait été pris parallèlement à leur direction commune, on aura

$$F = AA'A'' + m(x+n) \mp KTT'T'' + p(x+q)^3;$$

d'où l'on tire

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dF}{dy} &= aA'A'' + a'A''A + a''AA' \\ &= K(bT'T'' + b'T''T + b''TT'), \end{aligned} \right.$$

a, a', a'', b, b', b'' étant respectivement les coefficients de y dans les fonctions du premier degré A, A', A'', T, T' et T''.

Cela posé, l'équation

$$aA'A'' + a'A''A + a''AA' = 0$$

représente une conique qui passe par les trois sommets du triangle des asymptotes ; de même

$$bT'T'' + b'T''T + b''TT' = 0$$

est l'équation d'une conique passant par les trois sommets du triangle des tangentes aux points d'inflexion ; mais, d'après la relation (3), ces deux courbes coïncident : donc les six points en question sont bien sur une même conique.

Remarque. — Les formes (1) et (2) de l'équation générale du troisième degré, formes qui peuvent facilement être établies antérieurement à toute notion acquise sur les courbes du troisième ordre, démontrent immédiatement les deux propriétés suivantes, qui sont connues et que l'on a admises dans la solution précédente :

1° Les trois points finis, où une courbe du troisième degré est coupée par ses asymptotes, sont en ligne droite.

2° Toute droite qui passe par deux points d'inflexion d'une courbe du troisième degré rencontre la courbe en un autre point d'inflexion.

QUESTIONS.

1249. On a la série rapidement convergente

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3.7} + \frac{1}{3.7.47} + \frac{1}{3.7.47.2207} + \ldots,$$

dans laquelle chacun des facteurs du dénominateur est égal au carré du précédent diminué de deux unités.

(E. Lucas.)

1250. Recherche des lignes telles que la corde qui sous-tend leurs intersections avec les côtés d'un angle droit pivotant sur un point fixe enveloppe un cercle autour de ce point.

On sait que l'ellipse, rapportée à son centre, forme un cas particulier de cette catégorie de courbes.

(Haton de la Goupillière.)

1251. L'expression

$$6xy(3x^4 + y^4),$$

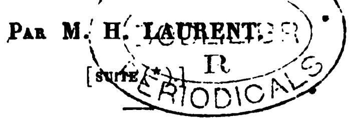
dans laquelle x et y sont des entiers différents de zéro, ne peut jamais représenter un cube, ni le quadruple d'un cube.

(S. Realis.)

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

[SUITE (*).]



ÉTUDES DES PREMIÈRES TRANSCENDANTES QUE L'ON RENCONTRE DANS LE CALCUL INTÉGRAL.

Les fonctions entières s'intègrent immédiatement, les fonctions rationnelles s'intègrent en les décomposant en fractions simples : quand ces fractions simples sont de la forme $\frac{A}{(x-a)^m}$, elles s'intègrent immédiatement; quand elles sont de la forme $\frac{A}{x-a}$, elles ne s'intègrent plus au moyen de signes algébriques, ou du moins on ne sait plus les intégrer de cette façon.

On rencontre aussi des fractions de la forme

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n};$$

mais, en adoptant les imaginaires dans le calcul, ces fractions se réduisent à la forme $\frac{A}{(x-a)^n}$.

L'intégrale de $\frac{A}{x-a}$ est une fonction logarithmique bien étudiée dans les éléments et bien connue; on conçoit cependant que la découverte des logarithmes ait pu suivre celle du Calcul intégral, et il est intéressant de voir comment on aurait pu étudier les propriétés de la nouvelle fonction.

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVI, p. 78, 211, 361.

Et d'abord il y a lieu de se demander, si l'intégrale de $\frac{A}{x-a}$ engendre réellement une fonction transcendante, ou seulement une fonction réductible aux fonctions algébriques; nous allons voir, en étudiant ses propriétés, qu'elle constitue une fonction nouvelle. D'abord, en mettant à part le facteur A constant et remplaçant $x-a$ par x, on ramène cette intégrale à la forme

$$\int \frac{dx}{x}.$$

Posons

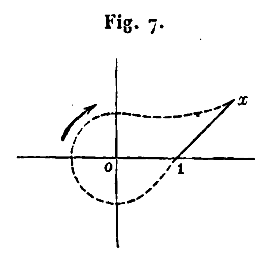
$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \log x,$$

le signe log étant employé pour représenter la nouvelle fonction (nous précisons notre intégrale avec la limite 1 et non zéro, afin qu'elle reste finie).

Nous pouvons prouver : 1° que $\log x$ n'est pas monodrome et par suite ne peut pas être rationnel; 2° que $\log x$ a une infinité de valeurs pour une même valeur de x, et qu'il ne saurait alors coïncider avec une fonction algébrique qui n'en a qu'un nombre limité.

Pour le prouver, observons que l'on peut aller du point 1 au point x, soit directement par le chemin $1x$

Fig. 7.



rectiligne, ce qui fournit la valeur que nous appellerons $\log x$, soit par tout autre chemin. La valeur de l'inté-

grale prise le long d'un chemin qui, avec $x\,1$, forme un contour fermé ne contenant pas l'origine où $\frac{1}{x}$ est infini, donnerait la même valeur $\log x$; mais si, pour aller de 1 à x, on suit un chemin qui enveloppe le point o, tel que celui qui est figuré en pointillé, l'intégrale prise le long de ce contour, augmentée de l'intégrale prise le long de $x\,1$, sera égale à l'intégrale prise le long d'un cercle de rayon très-petit décrit autour du point o; on aura donc, en se rappelant que cette dernière est égale à $\pm 2\pi\sqrt{-1}$,

$$\int \frac{dx}{x} - \log x = -2\pi\sqrt{-1};$$

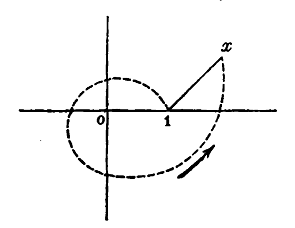
Je mets $-2\pi\sqrt{-1}$, parce que l'intégrale doit être prise dans le sens rétrograde; on a donc dans ce cas

$$\int \frac{dx}{x} = \log x - 2\pi\sqrt{-1}.$$

Si, au contraire, la figure avait la disposition ci-dessous, on aurait

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + 2\pi\sqrt{-1}.$$

Fig. 8.

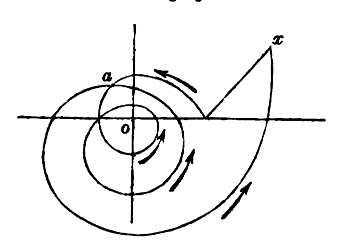


Il y a plus, si, au lieu de suivre un contour simple comme les deux précédents, on suit un contour entourant 2, 3, 4, ... fois l'origine, tel que celui ci-

dessous qui l'entoure trois fois, il est clair que l'on aura

$$\int \frac{dx}{x} \log x + 2, 4, 6 \ldots \pi\sqrt{-1};$$

Fig. 9.



dans le cas de la figure, on a

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + 6\pi\sqrt{-1}.$$

Ainsi la valeur générale de l'intégrale considérée est

$$\log x \pm 2k\pi\sqrt{-1},$$

k désignant un entier, et ces valeurs de $\log x$ sont inséparables les unes des autres; ainsi, quand le point x passe en a pour la seconde fois, l'intégrale y acquiert une valeur égale à la précédente augmentée de 2π, et cela en *vertu de la continuité;* en d'autres termes, on ne pourrait assigner à $\log x$ une valeur déterminée en a qu'en rompant la continuité de cette fonction.

Si l'on considère l'équation

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0,$$

on en tire d'abord

$$\int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^y \frac{dy}{y} = \text{const.},$$

ce que l'on peut écrire

$$(1) \qquad \log x + \log y = \log a,$$

a désignant une constante. Mais on en tire aussi

$$y\,dx + x\,dy = 0,$$

ou

$$(2) \qquad xy = b,$$

b désignant une constante. Les formules (2) devant être identiques, faisons $x = 1$; (1) donnera $\log y = \log a$ et (2) donnera $y = b$, ce qui exige que $a = b$. Des formules (1) et (2) on tire alors, en remplaçant b par a,

$$\log x + \log y = \log xy,$$

ce qui est la propriété fondamentale de la fonction logarithmique.

La fonction inverse de $\log x$ sera représentée par $e(x)$, en sorte que, si

$$y = \log x,$$

on aura

$$x = e(y);$$

la propriété fondamentale des logarithmes donne la propriété fondamentale des exponentielles

$$e(x+y) = e(x) - e(y),$$

ce qui conduit à écrire

$$e(x) = e^x,$$

et comme l'on a

$$\log x = y + 2k\pi\sqrt{-1},$$

y désignant l'une des valeurs de $\log x$, on a

$$e^x = e^{x+2k\pi\sqrt{-1}};$$

la fonction e^x est alors périodique et a pour période

$2k\pi\sqrt{-1}$. De la formule

$$dy = \frac{dx}{x}$$

on tire

$$\frac{dx}{dy} = x.$$

y étant le logarithme de x, on voit que la dérivée de la fonction exponentielle e^y prise par rapport à y est cette fonction elle-même ; on est alors conduit à représenter e^x au moyen d'une série, et sa théorie s'achève comme dans les éléments.

On voit ainsi que la découverte de Neper eût été faite par les inventeurs du Calcul infinitésimal dès les débuts du calcul inverse.

DES DIVERS CHEMINS QUE PEUT SUIVRE LA VARIABLE DANS LA RECHERCHE DES INTÉGRALES DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES.

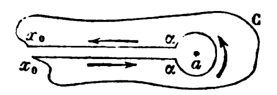
Toute fonction algébrique y étant monodrome à l'intérieur d'un contour ne contenant pas de point critique, son intégrale sera nulle le long d'un pareil contour ; donc :

1° L'intégrale prise le long d'un contour quelconque $x_0 x$ pourra être remplacée par l'intégrale prise le long du contour rectiligne $x_0 x$, si entre ce contour et le contour donné il n'existe pas de point critique.

2° Si, à l'intérieur du contour C formé par le chemin rectiligne et le chemin donné, il existe un point critique a, on pourra remplacer le chemin donné par un autre allant de x_0 vers un point α très-voisin du point critique sans sortir du contour C, tournant ensuite le long du cercle décrit de a comme centre avec αa pour rayon, revenant en α, puis en x_0 par le chemin αx_0 in-

verse du chemin $x_0\alpha$ suivi tout à l'heure, enfin allant par le chemin rectiligne de x_0 à x. En effet, le nouveau chemin et l'ancien ne comprennent entre eux aucun point critique.

Fig. 10.



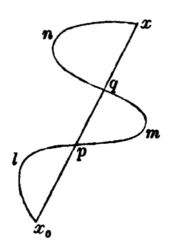
Le chemin formé d'une ligne allant de x_0 au point α voisin du point critique a, tournant autour de ce point et revenant en x_0 par la route déjà suivie pour aller de x_0, est ce que l'on appelle un *lacet*.

Nous avons figuré ci-dessus un lacet en séparant l'aller du retour pour bien montrer comment le lacet peut se substituer au contour C.

3° Si, entre le contour C formé par le chemin rectiligne et le contour donné, il existait plusieurs points critiques, on pourrait remplacer ce contour par une série de lacets suivis de la droite $x_0 x$.

4° Supposons que le contour d'intégration donné rencontre la droite $x_0 x_1$ en p, q.

Fig. 11.



On pourra remplacer le chemin xlp par une série de lacets et par la droite $x_0 p$; on est alors ramené au

chemin x_0pmq, que l'on peut remplacer par une série de lacets suivis de xq, et ainsi de suite; donc :

THÉORÈME. — *Tous les chemins que l'on peut suivre pour aller de x_0 en x peuvent être remplacés par une série de lacets ayant leurs origines et leurs extrémités en x_0, suivis du contour rectiligne x_0x* (*).

Nous dirons qu'un lacet unit deux valeurs y_i et y_j quand ces deux valeurs de y se permutent l'une dans l'autre lorsque l'on suit ce lacet.

Mais nous préciserons encore davantage : en général, en suivant un lacet, on ne permute que deux valeurs de la fonction y; toutefois il pourra se faire qu'en suivant un même lacet plusieurs fois de suite, on obtienne une permutation circulaire des valeurs $y_1, y_2, y_3, \ldots$ de y; nous considérerons comme distincts tous les lacets parcourus avec des valeurs initiales différentes de y. Ainsi, par exemple, si le point a est un point critique ordinaire, deux racines y_i et y_k se permuteront l'une dans l'autre en parcourant ce lacet; nous le supposerons double, mais seulement pour la commodité du langage, en sorte que, s'il est parcouru avec la valeur initiale y_i, nous le considérerons comme formant un premier lacet unissant y_i à y_k, et s'il est parcouru avec la valeur initiale y_k, nous le considérerons comme un second lacet distinct du premier et unissant y_k à y_i.

De même, si au point a trois valeurs y_i, y_j, y_k se permutaient entre elles, on aurait à considérer le lacet correspondant comme triple : l'un des lacets simples unirait y_i à y_j et serait parcouru avec la valeur initiale y_i, et

---

(*) Il va sans dire que nous supposons que le chemin rectiligne x_0x ne rencontre pas de point critique. S'il en rencontrait un, ce qui n'arrivera que dans des cas tout particuliers, il faudrait, pour l'exactitude du théorème, éviter ce point en déformant le contour rectiligne.

ainsi de suite. Ainsi, au mot *lacet* est attachée l'idée d'un chemin et l'idée d'une valeur initiale de y bien déterminée.

DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES.

Dès les débuts du Calcul intégral, on est arrêté par des difficultés insurmontables quand on veut calculer la fonction dont la dérivée dépend d'un radical carré recouvrant un polynôme du degré supérieur au second. Cette difficulté provient de ce que la fonction cherchée dépend de nouvelles transcendantes irréductibles, comme l'a prouvé M. Liouville, aux transcendantes étudiées dans les *Éléments* ou aux fonctions algébriques. Legendre, qui soupçonnait cette irréductibilité, s'est surtout attaché à étudier les propriétés analytiques des transcendantes les plus simples auxquelles conduit le Calcul intégral, et a créé la théorie des fonctions elliptiques.

On donne le nom d'*intégrales elliptiques* à des intégrales de forme simple, auxquelles on peut ramener les intégrales de la forme

$$(1) \qquad V = \int F(x, y)\, dx,$$

où $F(x, y)$ désigne une fonction rationnelle de x et de y, et où y représente un radical de la forme

$$y = \sqrt{Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E},$$

A, B, C, D, E désignant des coefficients constants. Nous supposerons le polynôme placé sous le radical décomposé en facteurs, et nous aurons

$$y = \sqrt{G(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)},$$

G désignant un nombre quelconque réel ou imaginaire.

On simplifie la formule (1) en posant

$$x = \frac{a + b\xi}{1 + \xi},$$

on trouve alors

(2) $$V = \int \Phi(\xi, \eta)\, d\xi,$$

$\Phi(\xi, \eta)$ désignant une fonction rationnelle de ξ et de η, et η désignant le radical

$$y = \sqrt{G[a - \alpha + (b - \alpha)\xi][a - \beta + (b - \beta)\xi]\ldots}.$$

Les puissances paires de ξ sous le radical disparaîtront si l'on pose

$$(a - \alpha)(b - \beta) + (a - \beta)(b - \alpha) = 0,$$
$$(a - \gamma)(b - \delta) + (a - \delta)(b - \gamma) = 0;$$

d'où l'on tire

$$2ab - (a + b)(\alpha + \beta) + 2\alpha\beta = 0,$$
$$2ab - (a + b)(\gamma + \delta) + 2\gamma\delta = 0,$$

ou

$$ab = \frac{\alpha\beta(\gamma + \delta) - \gamma\delta(\alpha + \beta)}{\alpha + \beta - \gamma - \delta},$$

$$a + b = \frac{2\alpha\beta - 2\gamma\delta}{\alpha + \beta - \gamma - \delta}.$$

Ces équations montrent que a et b sont racines d'une équation du second degré facile à former. On pourra donc toujours supposer que la quantité placée sous le radical η ne contient que le carré et la quatrième puissance de la variable ξ.

Cette transformation semble tomber en défaut quand on a $\alpha + \beta - \gamma - \delta = 0$; mais alors on a

$$y = \sqrt{G[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta][x^2 - (\alpha + \beta)x + \gamma\delta]},$$

et il suffit de poser

$$x - \frac{\alpha + \beta}{2} = \xi$$

pour faire disparaître les puissances impaires de la variable.

Remarque I. — Il est bon d'observer que, si le produit $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$ est réel, les quantités a et b pourront toujours être supposées réelles; en effet, la condition de réalité des racines de l'équation du second degré qui fournit a et b est

$$(\alpha\beta - \gamma\delta)^2 - [\alpha\beta(\gamma+\delta) - \gamma\delta(\alpha+\beta)]^2 > 0.$$

Le premier membre de cette égalité s'annule pour $\alpha = \gamma$, $\alpha = \delta$, $\beta = \gamma$, $\beta = \delta$, et l'on constate facilement qu'il est égal à $(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)$. Il est donc réel si α, β, γ, δ sont réels. Il est encore réel si, ce que l'on peut supposer, α et β sont conjugués, et si γ et δ sont réels ou conjugués. Ainsi donc on peut toujours supposer a et b réels si

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

est un polynôme à coefficients réels.

Remarque II. — Si le polynôme placé sous le radical y n'était pas décomposé en facteurs, en remplaçant x par $\frac{a+b\xi}{1+\xi}$ et en annulant les coefficients de ξ et ξ^3 sous le radical, on obtiendrait la même simplification.

Remarque III. — Si l'on avait

$$y = \sqrt{G(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)},$$

en posant

$$x - \alpha = \xi^2,$$

on trouverait

$$V = \int \Phi(\eta, \xi)\, d\xi,$$
$$\eta = \sqrt{G(\xi^2 + \alpha - \beta)(\xi^2 + \alpha - \gamma)},$$

Φ désignant une fonction rationnelle de ξ et de η.

Ainsi toute intégrale telle que V, dans laquelle y désigne un radical carré recouvrant un polynôme du troisième ou du quatrième degré, peut être ramenée à la forme

$$V = \int \Phi(x, y)\, dx,$$

y désignant un radical de la forme

$$\sqrt{G(1 + mx^2)(1 + nx^2)},$$

m et n désignant des constantes, et il est clair qu'en posant

$$\xi = x\sqrt{-m}, \quad k^2 = -\frac{n}{m},$$

on pourra ramener le radical à la forme

$$\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}.$$

Posant alors

$$y = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)},$$

les intégrales que nous nous proposons d'étudier prendront la forme

$$V = \int F(x, y)\, dx,$$

F désignant toujours une fonction rationnelle. Nous verrons par la suite que la quantité k^2, à laquelle on a donné le nom de *module*, peut toujours être censée réelle et moindre que l'unité.

RÉDUCTION DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES À DES TYPES SIMPLES.

Reprenons l'intégrale

(1) $$V = \int F(x, y)\, dx,$$

dans laquelle nous avons vu que l'on pouvait supposer

$$y = \sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2 x^2)};$$

$F(x,y)$ peut toujours être mis sous la forme $\frac{\varphi(x, y)}{\psi(x, y)}$, φ et ψ désignant deux fonctions entières de x et y; mais une fonction entière de x et de y peut toujours être censée du premier degré en y, car y^2 est une fonction entière de x, y^3 est le produit de y par une fonction entière de x, etc. On peut donc poser

$$F(x,y) = \frac{A + By}{C + Dy},$$

A, B, C, D désignant des polynômes entiers en x.

Si l'on multiplie les deux termes de cette fraction par $C - Dy$, elle prend la forme

$$F(x,y) = M + Ny,$$

M et N désignant deux fonctions rationnelles de x, et comme $Ny = \frac{Ny^2}{y}$, on peut encore écrire

$$F(x,y) = M + \frac{P}{y},$$

P désignant une nouvelle fonction rationnelle de x; la formule (1) donne alors

$$V = \int M\, dx + \int P \frac{dx}{y}.$$

La première intégrale s'obtient par des procédés bien

connus et peut s'exprimer au moyen des logarithmes et des fonctions rationnelles. Il reste alors à étudier les intégrales de la forme

$$(2)\qquad U = \int P \frac{dx}{y}.$$

Je dis que l'on peut toujours supposer qu'il n'entre dans l'expression de P que des puissances paires de x; en effet, on peut poser

$$P = \frac{H + Kx}{I + Lx},$$

H, K, I, L désignant des polynômes de degré pair en x, et, par suite, on a

$$P = \frac{(H + Kx)(I - Lx)}{I^2 - L^2 x^2};$$

P peut donc être censé de la forme

$$\frac{M + Nx}{S},$$

M, N, S désignant des polynômes de degré pair. La formule (2) donne alors

$$U = \int \frac{M}{S} \frac{dx}{y} + \int \frac{N}{S} x \frac{dx}{y}.$$

La seconde intégrale, en posant $x^2 = z$, prend la forme

$$\int f(z) \frac{dz}{\sqrt{(1 - z)(1 - k^2 z)}},$$

où $f(z)$ est rationnel en z; elle pourra donc s'obtenir par les procédés enseignés dans les *Éléments du Calcul intégral*. Il ne reste donc plus qu'à s'occuper des intégrales de la forme (2), dans lesquelles P ne contient que des puissances paires de x.

La fonction P, étant décomposée en éléments simples,

se composera de termes de la forme Ax^{2m} et $\frac{A}{x^2 - a^2}$, A et a désignant des constantes, et l'intégrale U se composera elle-même de termes réductibles aux formes

$$u = \int \frac{x^{2m}}{y} dx, \quad v = \int \frac{dx}{(x^2 - a^2)y}.$$

L'intégrale u peut encore se simplifier, et l'on peut toujours supposer $m = 0$ ou $m = 1$: il suffit pour cela d'observer que l'on a

$$d\left[x^{2m-3}\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}\right] = \frac{ax^{2m} + bx^{2m-2} + cx^{2m-4}}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} dx,$$

a, b, c désignant des constantes que l'on déterminera en faisant les calculs indiqués; on en conclut la formule de réduction

$$x^{2m-3}y = a\int \frac{x^{2m}}{y} dx + b\int \frac{x^{2m-2}}{y} dx + c\int \frac{x^{2m-4}}{y} dx,$$

qui permettra de calculer $\int \frac{x^{2m}}{y} dx$ de proche en proche, quand on connaîtra

$$\int \frac{dx}{y} \quad \text{et} \quad \int \frac{x^2 dx}{y};$$

il suffira pour cela d'y faire successivement

$$m = 2, 3, \ldots.$$

DES TRANSCENDANTES DE LEGENDRE ET DE JACOBI.

En définitive, les intégrales de la forme

$$\int F(x, y)\, dx,$$

où F désigne une fonction rationnelle de x et d'un radical carré recouvrant un polynôme du quatrième de-

gré, peuvent se calculer au moyen des fonctions algébriques, logarithmiques, circulaires, et au moyen de trois transcendantes nouvelles :

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \quad \int_0^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-a^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

ou

$$\int \frac{dx}{(1-ax^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

La première est, comme on le verra, la plus importante : ce sont les trois *intégrales elliptiques* de première, de deuxième et de troisième espèce.

Legendre pose $x = \sin\varphi$; les trois intégrales précédentes deviennent alors, en prenant pour limites inférieures zéro,

$$\int_0^\varphi \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

$$\frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{1}{k^2}\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

et

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-a\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

la première était pour Legendre l'intégrale de première espèce, l'intégrale $\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$ était l'intégrale de deuxième espèce, la troisième était l'intégrale de troisième espèce. L'intégrale de deuxième espèce représente l'arc d'ellipse exprimé en fonction de l'anomalie excentrique de son extrémité.

φ est ce que Legendre appelait l'*amplitude* des trois

intégrales, k porte le nom de *module*, a est le *paramètre* de l'intégrale de troisième espèce.

Legendre, dans son *Traité des fonctions elliptiques*, étudie surtout les propriétés des trois intégrales que nous venons de signaler, et indique le moyen d'en construire des Tables. Mais Abel et Jacobi, se plaçant à un point de vue beaucoup plus élevé, ont considéré les intégrales elliptiques comme des fonctions inverses; pour bien faire saisir la pensée qui a guidé ces géomètres dans leurs recherches, nous ferons observer que les logarithmes et les fonctions circulaires inverses pourraient être définies par les formules

$$\log x = \int_1^x \frac{dx}{x}, \quad \arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \ \ldots,$$

et auraient certainement été étudiées avant l'exponentielle, le sinus, etc., si ces fonctions *directes* n'avaient pas été fournies par des considérations élémentaires. Le fil de l'induction devait laisser penser que l'intégrale

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

ne définissait pas une fonction aussi intéressante que son inverse.

ÉTUDE DE L'INTÉGRALE $\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}}$.

Avant d'étudier la fonction elliptique, il convient, pour la commodité de l'exposition, d'étudier l'intégrale un peu plus générale

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}};$$

x est une fonction évidemment continue de y, tant que y n'est égal à aucune des quantités α, β, γ, δ, ∞, et réciproquement y sera une fonction continue de x; il y a plus, lors même que y passe par la valeur α par exemple, x reste continu. En effet, posant $x = f(y)$, on a·

$$f(\alpha) = \int_0^\alpha \frac{dy}{\sqrt{y-\alpha}} \frac{1}{\sqrt{(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}}:$$

cette expression est finie comme l'on sait; on a aussi

$$f(\alpha+h) = \int_0^{\alpha+h} \frac{dy}{\sqrt{y-\alpha}} \frac{1}{\sqrt{(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}},$$

et, par suite,

$$f(\alpha+h) - f(\alpha) = \int_\alpha^{\alpha+h} \frac{dy}{\sqrt{y-\alpha}} \frac{1}{\sqrt{(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}};$$

soient M une quantité dont le module reste supérieur à celui de $\frac{1}{\sqrt{(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}}$, ε une quantité dont le module est au plus égal à 1, on aura

$$f(\alpha+h) - f(\alpha) = \mathrm{M}\varepsilon \int_\alpha^{\alpha+h} \frac{dx}{\sqrt{y-\alpha}} = 2\mathrm{M}\varepsilon(\sqrt{\alpha+h} - \sqrt{\alpha});$$

cette quantité est bien infiniment petite. Ainsi :

Théorème I. — *La fonction x et, par suite, son inverse y sont continues, excepté quand y ou x sont infinis.*

Pour bien préciser le sens de la fonction x, il faut supposer que, pour $y = 0$, le radical ait une valeur bien déterminée, que nous représenterons par $+\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}$, et quand je dis que, pour $y = 0$, le radical a cette valeur,

j'entends par là que l'intégrale est engendrée avec cette valeur initiale du radical qui pourra prendre au point o la valeur $-\sqrt{\alpha\beta\gamma\delta}$ quand la variable y reviendra en ce point. Cela posé,

Théorème II. — *La fonction y admet deux périodes.*

En effet, les contours que l'on peut suivre pour engendrer l'intégrale x peuvent se ramener : 1° au contour rectiligne oy allant du point o au point y; 2° à ce contour précédé de contours fermés aboutissant en o et formés de lacets.

Soient A, B, C, D les valeurs que prend l'intégrale autour des lacets relatifs aux points α, β, γ, δ respectivement.

Appelons i la valeur que prend l'intégrale x quand le chemin que suit la variable y est le contour rectiligne oy; x pourra prendre les valeurs suivantes :

1° La valeur i;

2° Les valeurs $\pm A - i$, $\pm B - i$, $\pm C - i$, $\pm D - i$.

En effet, par exemple, la variable y parcourant d'abord le lacet A dans le sens direct ou dans le sens rétrograde, x prend la valeur $\pm$ A, le radical revient en o avec sa valeur primitive changée de signe, la variable décrivant ensuite le chemin oy, l'intégrale prend le long de ce chemin la valeur $-i$, et l'intégrale totale se réduit à $\pm A - i$.

3° En général, quel que soit le sens dans lequel on parcourt un lacet, la valeur de l'intégrale ne dépend que du signe du radical à l'entrée du lacet, et ce signe change à la sortie du lacet; il en résulte que, si la valeur initiale du radical est précédée du signe $+$, la valeur générale de x sera

$$A - B + C - D + \ldots \pm i,$$

le signe de i étant $+$ s'il est précédé d'un nombre pair de termes, — s'il est précédé d'un nombre impair de termes; de sorte que, si l'on pose

$$\begin{aligned} P = m_1(A - B) + m_2(A - C) + m_3(A - D) \\ + m_4(B - C) + m_5(B - D) + m_6(C - D), \end{aligned}$$

$m_1, m_2, \ldots, m_6$ étant des entiers positifs ou négatifs, les valeurs de x seront de la forme

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} P + i, & P + A - i, & P + B - i, \\ & P + C - i, & P + D - i, \end{array} \right.$$

que l'on peut simplifier. En effet, si l'on intègre

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}}$$

le long d'un cercle de rayon infini décrit de l'origine comme centre, on obtient un résultat nul, mais cette intégrale est aussi égale, en vertu du théorème de Cauchy, à la somme des intégrales prises successivement le long des quatre lacets; donc

$$A - B + C - D = 0,$$

et si l'on pose

$$A - B = \omega, \quad B - C = \varpi,$$

on aura

$$\begin{gathered} B = A - \omega, \quad C = A - \omega - \varpi, \quad D = A - B + C = A - \varpi, \\ A - B = \varpi, \quad A - C = \omega + \varpi, \quad A - D = \varpi, \\ B - C = \varpi, \quad B - D = \varpi - \omega, \quad C - D = -\omega. \end{gathered}$$

La quantité P est donc de la forme $m\omega + n\varpi$, et les diverses valeurs de x de la forme

$$m\omega + n\varpi + i \quad \text{ou} \quad m\omega + n\varpi + A - i.$$

Les quantités m et n désignant des entiers quelconques,

il résulte de là que, si l'on fait $y = f(x)$, on aura

$$(4)\quad f(m\omega + n\varpi + i) = f(m\omega + n\varpi + A - i) = f(i);$$

la fonction y admet donc les deux périodes ω et ϖ.

Si nous partageons le plan en une infinité de parallélogrammes, dont les côtés soient ω et ϖ, ces parallélogrammes porteront le nom de *parallélogrammes des périodes*, et nous pourrons énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Dans chaque parallélogramme des périodes, la fonction y prend deux fois la même valeur pour deux valeurs distinctes de x.*

On peut démontrer directement que la fonction y est monodrome dans toute l'étendue du plan. En effet, si le point y se meut dans une portion du plan qui ne contient pas des points critiques, x reste fonction monodrome de y, et l'équation

$$(A)\quad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(y-\alpha)(y-\beta)(y-\gamma)(y-\delta)}} - x = 0$$

fournit une série de valeurs de x comprises dans un certain contour C. Réciproquement, la racine y de cette équation ne pourra cesser d'être monodrome qu'autour des points où y acquerrait des valeurs multiples ou autour desquels le premier membre de l'équation cesserait d'être monodrome ou fini par rapport à y; or, la dérivée du premier membre de notre équation relative à y ne s'annule que pour $y = \infty$; les seuls points où y pourrait cesser d'être monodrome correspondent donc à $y = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ et ∞.

Posons donc

$$y = \alpha + z^2,$$

$$\frac{dy}{dx} = 2z\frac{dz}{dx};$$

la formule (A) deviendra

$$\int_{\sqrt{\alpha}}^{z} \frac{z\,dz}{\sqrt{(z^2+\alpha-\beta)(z^2+\alpha-\gamma)(z^2+\alpha-\delta)}} - x = 0.$$

La fonction z ne cesse évidemment pas d'être monodrome autour du point $z = 0$, et, par suite, y ne cesse pas d'être monodrome autour du point α (α, β, γ sont, bien entendu, supposés différents les uns des autres).

Si l'on veut étudier ce qui se passe autour du point $x = \xi$, pour lequel $y = \infty$, on posera

$$y = \frac{1}{z};$$

on aura alors, au lieu de la formule (A),

$$\int_{\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)}} - x = 0,$$

et, en raisonnant comme plus haut, on voit que cette équation, pour $y = \infty$ ou pour $z = 0$, ne cesse pas d'être monodrome par rapport à x.

Nous verrons plus loin une démonstration lumineuse de ces résultats, mais il était nécessaire de présenter ces considérations pour faire comprendre l'esprit qui nous guide dans nos recherches.

Notre but dans ce paragraphe était de montrer comment on pouvait être conduit à concevoir des fonctions possédant deux périodes.

(*A suivre.*)

SUR LE CENTRE DE GRAVITÉ D'UN POLYGONE ;

PAR M. A. LAISANT.

1. Soit ABC...L un polygone, et soit O un point quelconque du plan. Le centre de gravité G de l'aire du polygone peut s'obtenir en plaçant aux centres de gravité des triangles OAB, OBC, ..., OLA des masses proportionnelles à leurs aires respectives, et en prenant le centre de gravité de ces masses.

Si donc nous posons, en général, aire $OPQ = s_{p,q}$, nous aurons

$$\begin{aligned} &\mathrm{OG}\ \text{aire ABC}\ldots\mathrm{L} \\ &\triangleq \frac{\mathrm{OA}+\mathrm{OB}}{3}s_{a,b}+\frac{\mathrm{OB}+\mathrm{OC}}{3}s_{b,c}+\ldots+\frac{\mathrm{OL}+\mathrm{OA}}{3}s_{l,a} \\ &\triangleq \frac{1}{3}\left[\mathrm{OA}(s_{l,a}+s_{a,b})+\mathrm{OB}(s_{a,b}+s_{b,c})+\ldots\mathrm{OL}+(s_{k,l}+s_{l,a})\right]. \end{aligned}$$

Soient $s_{l,a}+s_{a,b}=\alpha$, $s_{a,b}+s_{b,c}=\beta$, ... les aires des quadrilatères OLAB, OABC, ... ; on a évidemment

$$\text{aire ABC}\ldots\mathrm{L} = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\ldots+\lambda),$$

et l'expression ci-dessus devient

$$\frac{1}{2}\mathrm{OG}(\alpha+\beta+\ldots+\lambda) = \frac{1}{3}(\mathrm{OA}.\alpha+\mathrm{OB}.\beta+\ldots+\mathrm{OL}.\lambda).$$

Si maintenant nous plaçons en A, B, C, ... des masses respectivement proportionnelles à α, β, γ, ..., leur centre de gravité H sera donné par la relation

$$\mathrm{OH}(\alpha+\beta+\ldots+\lambda) = \mathrm{OA}.\alpha+\mathrm{OB}.\beta+\ldots+\mathrm{OL}.\lambda;$$

d'où, par comparaison,

$$OG \bumpeq \frac{2}{3}\, OH,$$

ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

On joint un point fixe à tous les sommets d'un polygone; à chaque sommet on place une masse proportionnelle au quadrilatère formé par ce sommet, les deux sommets voisins et le point fixe. Le centre de gravité de ces masses, celui de l'aire du polygone et le point fixe sont en ligne droite; et cette droite est divisée au tiers par le centre de gravité de l'aire du polygone.

2. Si l'on applique ce qui précède au quadrilatère, en choisissant pour le point O l'intersection des diagonales, on voit immédiatement que

$$\begin{aligned} OH &\bumpeq \frac{1}{2}\left(OA\,\frac{AO}{AC} + OB\,\frac{BO}{BD} + OC\,\frac{CO}{CA} + OD\,\frac{DO}{DB}\right) \\ &\bumpeq \frac{1}{2}\left(\frac{OC^2 - OA^2}{OC - OA} + \frac{OD^2 - OB^2}{OD - OB}\right) \\ &\bumpeq \frac{1}{2}\,(OC + OA + OD + OB) \end{aligned}$$

et

$$OG \bumpeq \frac{1}{3}\,(OA + OB + OC + OD),$$

ce qui donne fort simplement cette propriété connue :

Le centre de gravité de l'aire d'un quadrilatère ABCD, *dont les diagonales se coupent en* O, *n'est autre que celui des masses* 1, 1, 1, 1, —1, *placées respectivement en* A, B, C, D *et* O.

3. Supposons maintenant que O soit le foyer d'une ellipse, et que les points A, B, C, ..., infiniment rapprochés, soient répartis sur le périmètre de cette ellipse,

de telle sorte que les triangles AOB, BOC, COD, ..., soient équivalents.

Le point H sera évidemment à la limite le centre de gravité de la circonférence de l'ellipse, la répartition de la densité en chaque point résultant de la distribution des points A, B, C, ... Le point G ne sera autre que le centre de l'ellipse, à la limite, et nous aurons toujours

$$OG \overset{\frown}{=} \frac{2}{3} OH;$$

d'où

$$OH \overset{\frown}{=} \frac{3}{2} OG,$$

c'est-à-dire que le point H est *à moitié distance entre le centre de l'ellipse et le second foyer O'.*

Il est aisé de reconnaître que le problème que nous venons de résoudre ainsi n'est autre que celui-ci :

Une planète, dans sa révolution autour du Soleil, abandonne uniformément une quantité de matière qui se fixe sur la trajectoire. Quel est le centre de gravité de cette trajectoire matérielle, une fois la révolution accomplie?

SUR LA RÉSOLUTION DU SYSTÈME DES ÉQUATIONS $2v^2 - u^2 = w^2$ et $2v^2 + u^2 = 3z^2$ EN NOMBRES ENTIERS;

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Nous observerons d'abord qu'il est facile de ramener au système proposé la résolution de l'une des équations biquadratiques

$$4v^4 - u^4 = 3W^2 \quad \text{ou} \quad 9z^4 - w^4 = 8V^2,$$

et l'on a

$$W = wz \quad \text{et} \quad V = uv.$$

Nous supposons u, v, w, z entiers et premiers entre eux; nous tirons de la première équation du système proposé

$$\left(\frac{w+u}{2}\right)^2 + \left(\frac{w-u}{2}\right)^2 = v^2,$$

et, par les formules de résolution des triangles rectangles en nombres entiers,

$$\text{(A)} \quad u = a^2 - b^2 + 2ab, \quad w = a^2 - b^2 - 2ab, \quad v = a^2 + b^2;$$

les nombres a et b sont entiers et premiers entre eux, et u, w ont des signes arbitraires, afin de ne pas nuire à la généralité de la solution. En portant ces valeurs dans la seconde équation du système proposé, nous obtenons

$$(1) \qquad 3(a^2 + b^2)^2 + 4ab(a^2 - b^2) = 3z^2.$$

Cette égalité montre que le produit

$$ab(a+b)(a-b)$$

est divisible par 3; mais, puisque a et b sont premiers entre eux, on peut, à cause de la symétrie, puisque la forme de l'équation ne change pas en remplaçant respectivement a et b par $a+b$ et $a-b$, supposer

$$b = 3b'.$$

Alors l'équation (1) devient

$$(a^2 - 2ab' + 3b'^2)(a^2 + 6ab' + 27b'^2) = z^2;$$

mais z est impair, et les deux facteurs de z^2 sont premiers entre eux; on a donc

$$a^2 - 2ab' + 3b'^2 = z_1^2,$$
$$a^2 + 6ab' + 27b'^2 = z_2^2,$$
$$z = z_1 z_2,$$

c'est-à-dire

$$(a - b')^2 + 2b'^2 = z_1^2,$$
$$(a + 3b')^2 + 2(3b')^2 = z_2^2.$$

La décomposition en facteurs donne, pour la première équation,

(2) $$a - b' = \pm(r^2 - 2s^2), \quad b' = 2rs,$$

et pour la seconde

(3) $$a + 3b' = \pm(r'^2 - 2s'^2), \quad 3b' = 2r's'.$$

Il nous reste à identifier les valeurs de a et de b' tirées de chacune de ces équations, ce qui conduit aux quatre cas suivants :

Premier cas. — En prenant le signe + dans l'équation (2) et le signe — dans l'équation (3), on a

$$r^2 + 2rs - 2s^2 = 2s'^2 - 2r's' - r'^2,$$
$$3rs = r's'.$$

Posons

$$r' = 3mr \quad \text{et} \quad s = ms',$$

nous obtenons, par l'élimination de r' et de s, l'équation quadratique

$$m^2(9r^2 - 2s'^2) + 8rs'm + r^2 - 2s'^2 = 0.$$

Si nous exprimons que la valeur de m est rationnelle, il vient

$$36r^2s'^2 - 9r^4 - 4s'^4 = H^2,$$

équation impossible suivant le module 3.

Deuxième cas. — En prenant le signe — dans l'équation (2), et le signe + dans l'équation (3), on se trouve encore conduit à l'impossibilité précédente.

Troisième et quatrième cas. — En prenant, en même

temps, les signes supérieurs ou inférieurs dans les équations (2) et (3), nous arrivons aux relations

$$r^2 + 2rs - 2s^2 = r'^2 - 2r's' - 2s'^2,$$
$$3rs = r's'.$$

En posant encore

$$r' = 3mr \quad \text{et} \quad s = ms',$$

nous obtenons, comme ci-dessus, l'équation

$$m^2(9r^2 + 2s'^2) - 8rs'm = r^2 + 2s'^2.$$

Pour que la valeur de m tirée de cette équation soit rationnelle, on doit avoir

$$(3r^2 + 6s'^2)^2 - 32s'^4 = K^2,$$

et alors

$$m = \frac{-4rs' \pm K}{9r^2 + 2s'^2}.$$

On déduit, par la décomposition en facteurs,

$$3r^2 + 6s'^2 \pm K = 2p^4,$$
$$3r^2 + 6s'^2 \mp K = 16q^4,$$
$$s' = pq;$$

les nombres p et q sont entiers et premiers entre eux; on obtient ensuite, par addition et soustraction,

$$p^4 + 8q^4 = 3r^2 + 6s'^2,$$
$$p^4 - 8q^4 = \pm K.$$

La première des équations précédentes peut être mise sous la forme

$$(p^2 - 3q^2)^2 - q^4 = 3r^2,$$

et, par une nouvelle décomposition en facteurs,

$$\left.\begin{array}{r} p^2 - 2q^2 = g^2, \\ p^2 - 4q^2 = 3h^2, \\ r = gh, \end{array}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{array}{r} p^2 - 2q^2 = -g^2, \\ p^2 - 4q^2 = -3h^2, \\ r = gh; \end{array}\right.$$

la première décomposition est impossible suivant le module 4, et la seconde conduit au système

$$2q^2 - g^2 = p^2,$$
$$2q^2 + g^2 = 3h^2,$$

identique au système proposé.

Par conséquent, *on résout complétement le système des équations*

$$2v^2 - u^2 = w^2,$$
$$2v^2 + u^2 = 3z^2$$

par les formules

$$U = (r^2 + 8rs - 2s^2)^2 - 72r^2s^2,$$
$$V = (r^2 + 2rs - 2s^2)^2 + 36r^2s^2,$$
$$W = (r^2 - 4rs - 2s^2)^2 - 72r^2s^2,$$
$$Z = (r^2 + 2s^2)(2r^2 + 9s^2),$$

dans lesquelles

$$r = uz(2v^2w^2 + 9u^2z^2),$$
$$s = vw[4uvwz \pm (w^4 - 8u^4)].$$

Ainsi la solution immédiate

$$u_0 = v_0 = w_0 = z_0 = \pm 1$$

donne ainsi

$$v_1 = 37, \quad w_1 = 47, \quad u_1 = 23, \quad z_1 = 3 \times 11;$$

en prenant le signe inférieur dans la valeur de s, on a ensuite

$$v_2 = 40573, \qquad w_2 = 23183,$$
$$u_2 = 52487, \qquad z_2 = 139 \times 323;$$

puis la solution

$$v = 2\,53642\,20918\,55129,$$
$$u = 3\,58647\,03316\,69969,$$
$$w = 6406\,72783\,29889,$$
$$z = (9 \times 45\,97777)(11 \times 64\,33883),$$

qui a été calculée et vérifiée par M. Alphonse Fiquet; on observera que ces solutions croissent très-rapidement.

On peut aussi résoudre le système proposé, par l'équation (1), d'une autre manière, au moyen de la décomposition que nous avons employée autrefois (*).

La solution précédente conduit encore à la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Le système des équations*

$$2v^2 - u^2 = w^4 \quad \text{et} \quad 2v^2 + u^2 = 3z^2,$$

a pour solution unique $u = v = w = z = \pm 1$.

En effet, l'équation (A) donne, en remplaçant w par w^2,

$$a^2 - 6ab' - 9b'^2 = w^2,$$

car on ne peut supposer le second membre égal à un carré négatif. On tire de l'équation précédente

$$(4) \qquad a - 3b' = \pm(e^2 + 2f^2), \quad 3b' = 2ef;$$

identifions les valeurs de a et de b' tirées des équations (2) et (4), nous obtenons, en prenant en même temps les signes supérieurs,

$$e^2 + 2ef + 2f^2 = r^2 + 2rs - 2s^2,$$
$$ef = 3rs.$$

Posons encore

$$e = 3mr \quad \text{et} \quad s = mf,$$

nous arrivons à l'équation

$$m^2(9r^2 + 2f^2) - 4frm + 2f^2 - r^2 = 0.$$

Pour que la valeur de m soit rationnelle, on doit avoir l'équation

$$9r^4 - 12r^2f^2 - 4f^4 = R^2,$$

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XV, p. 468; 1876.

dans laquelle on peut supposer r et f premiers entre eux. On en tire

$$3r^2 - 2f^2 \pm \mathrm{R} = \pm 2g^4,$$
$$3r^2 - 2f^2 \mp \mathrm{R} = \mp 4h^4,$$
$$f = gh;$$

puis, par addition,

$$3r^2 = \pm (g^4 + 2h^4) + 2g^2h^2,$$

c'est-à-dire

$$3r^2 = (g^2 + h^2)^2 + h^4,$$

ou bien

$$-3r^2 = (g^2 - h^2)^2 + h^4;$$

ces deux dernières équations sont impossibles suivant le module 3; donc $g = h = 0$; puis $f = b' = 0$ et $w = \pm 1$.

En prenant les signes inférieurs dans les équations (2) et (4), on arrive aux mêmes conclusions; d'autre part, en prenant le signe — dans l'équation (2) et le signe + dans l'équation (4), on obtient

$$c^2 + 2f^2 = 2s^2 + 4rs - r^2,$$

et, comme précédemment,

$$4f^4 - 12f^2r^2 - 9r^4 = \mathrm{R}^2,$$

équation impossible suivant le module 4, puisque r ne peut être pair; car, s'il en était autrement, a et b ne seraient pas premiers entre eux, comme l'équation (2) le fait voir.

Enfin, en prenant le signe + dans l'équation (2) et le signe — dans l'équation (4), on arrive aux mêmes résultats.

Remarque I. — Les équations

$$4v^4 - u^4 = 3w^4 \quad \text{et} \quad 9z^4 - w^4 = 8v^4$$

ne peuvent être vérifiées séparément que pour des valeurs égales des indéterminées.

Remarque II. — Le système des équations

$$x = u^2, \quad x + 1 = 2v^2, \quad 2x + 1 = 3z^2$$

a pour solution unique $x = 1$; en effet, ce système donne

$$2v^2 - u^2 = 1^4 \quad \text{et} \quad 2v^2 + u^2 = 3z^2.$$

SUR UNE QUESTION PROPOSÉE PAR M. BOURGUET;

PAR M. CATALAN.

La solution donnée par M. Muffat, dans le numéro de juillet des *Nouvelles Annales*, a reporté mon attention sur l'énoncé suivant :

Trouver les racines de l'équation

$$(1) \qquad 0 = \frac{1}{2} - \frac{x}{x+1} + \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} - \ldots,$$

au sujet duquel je vais présenter quelques remarques.

I.

Quand on propose de *résoudre une équation*

$$\varphi(x) = 0,$$

il est sous-entendu que $\varphi(x)$ est une fonction, sinon *bien déterminée*, au moins *bien définie*. En est-il ainsi dans le cas actuel? Autrement dit, *la série* (1) *est-elle convergente pour toutes les valeurs positives de x?* C'est là une question préliminaire sur laquelle je ne me prononce pas, faute de temps, mais que M. Bourguet doit avoir examinée et résolue. Je me bornerai à cette seule indication : *si x croît indéfiniment, l'équation* (1)

devient à la limite

$$0 = \frac{1}{2} - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

ce qui est absurde.

II.

Si l'on attribue à x une valeur n entière et positive, la série (1) se réduit à ses $n+1$ premiers termes, savoir :

$$\frac{1}{2} - \frac{n}{n+1} + \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} - \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}.$$

M. Muffat a prouvé que cette quantité est nulle. En conséquence, *n étant un nombre entier quelconque, on a identiquement*

$$(2) \quad \frac{n}{n+1} - \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)} + \ldots \mp \frac{n(n-1)\ldots 1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n} = \frac{1}{2}.$$

Cette proposition remarquable est comprise dans l'un des théorèmes de Stirling (*).

III.

D'après la Note de M. Muffat, la question proposée admet comme solutions $x=1$, $x=2$, $x=3$, ... Mais rien ne prouve que l'équation $\varphi(x) = 0$ (**) n'ait pas de racines fractionnaires, incommensurables, imaginaires, etc. Le problème reste donc à résoudre ou peu s'en faut.

(*) Binet, *Journal de l'École Polytechnique*, XXVIIe Cahier, p. 154. Il suffit, pour retrouver l'égalité (2), de changer a en $-p$ dans la formule de Stirling.

(**) Encore une fois, nous admettons l'existence de la fonction $\varphi(x)$.

IV.

Après avoir rappelé que les racines de l'équation $\sin x = 0$ sont $x = 0$, $x = \pm\pi$, $x = \pm 2\pi$, ..., Euler déduit de cette simple remarque (*) la formule

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$$

En appliquant ce procédé (qui n'est nullement rigoureux), pourrait-on transformer $\varphi(x)$ en un *produit indéfini, admettant les facteurs*

$$1 - x, \quad 1 - \frac{x}{2}, \quad 1 - \frac{x}{3}, \quad \ldots, \quad 1 - \frac{x}{n}, \quad \ldots.$$

J'appelle sur ce point l'attention de M. Bourguet.

Note par le Rédacteur. — On a identiquement

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right) + (\alpha_1 - \alpha_2) + \ldots + (\alpha_{n-1} - \alpha_n) + \alpha_n,$$

de sorte que, si α_n a pour limite zéro quand n augmente indéfiniment, la série

$$\left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right) + (\alpha_1 - \alpha_2) + \ldots$$

sera convergente et aura pour somme $\frac{1}{2}$.

Posons

$$\alpha_p = \frac{1}{2}\,\frac{1 - x}{1 + x}\,\frac{2 - x}{2 + x}\cdots\frac{p - x}{p + x},$$

(*) *Introduction à l'Analyse*, p. 119.

il en résultera, pour l'expression du terme général $(\alpha_{p-1} - \alpha_p)$,

$$\alpha_{p-1} - \alpha_p = \frac{x}{1+x}\,\frac{1-x}{2+x}\cdots\frac{p-1-x}{p+x}.$$

Quel que soit x, soit k un nombre entier immédiatement supérieur à sa valeur absolue; posons

$$A = \frac{1}{2}\,\frac{1-x}{1+x}\,\frac{2-x}{2+x}\cdots\frac{k-1-x}{k-1+x},$$

le terme complémentaire α_n, n dépassant $k-1$, pourra s'écrire

$$\alpha_n = A\,\frac{k-x}{k+x}\,\frac{k+1-x}{k+1+x}\cdots\frac{n-x}{n+x}.$$

On voit immédiatement que, si x est négatif, chacune des fractions $\frac{k-x}{k+x}, \ldots, \frac{n-x}{n+x}$ est supérieure à l'unité, de sorte que α_n, au lieu de tendre vers zéro, va en augmentant : la série proposée est donc divergente.

Si x est positif, il est facile de montrer que α_n a pour limite zéro. En effet, de la formule connue

$$\log(1+y) - \log(1-y) = 2\left(y + \frac{y^3}{3} + \ldots\right),$$

on conclut, y étant positif et plus petit que 1,

$$\log\frac{1+y}{1-y} > 2y \quad \text{ou} \quad \frac{1+y}{1-y} > e^{2y},$$

puisque les nombres $\frac{1+y}{1-y}$ et e^{2y} sont supérieurs à l'unité.

Remplaçons dans cette inégalité y successivement par $\frac{x}{k}$,

$\frac{x}{k+1}, \ldots, \frac{x}{n}$, nous aurons

$$\frac{k+x}{k-x} > e^{2\frac{x}{k}},$$

$$\frac{k+1+x}{k+1-x} > e^{2\frac{x}{k+1}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{n+x}{n-x} > e^{2\frac{x}{n}},$$

et, en multipliant membre à membre,

$$\frac{k+x}{k-x}\,\frac{k+1+x}{k+1-x}\cdots\frac{n+x}{n-x} > e^{2x\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}.$$

Or l'exposant de e admet en facteur la série harmonique; donc le premier membre peut devenir supérieur à toute quantité donnée, et par suite α_n inférieur à toute quantité donnée; la série est donc convergente et a pour somme $\frac{1}{2}$; d'où il résulte que, pour $x > 0$, l'équation proposée par M. Bourguet est une identité.

Si l'on désigne, comme précédemment, par k un nombre entier immédiatement supérieur à $x (x > 0)$, par B le produit

$$(1-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{k-1}\right),$$

on pourra écrire, n dépassant $k-1$,

$$(1-x)\left(1-\frac{x}{2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n}\right)$$
$$= B\left(1-\frac{x}{k}\right)\left(1-\frac{x}{k+1}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{n}\right).$$

Chacun des facteurs qui suit B est inférieur à l'unité, de sorte qu'en passant d'un produit quelconque au suivant,

l'expression considérée diminue; nous allons voir qu'elle a pour limite zéro.

On a, en effet, pour $0 < y < 1$, d'après un développement connu,

$$1 - y < \frac{1}{e^y}.$$

On en conclut

$$1 - \frac{x}{k} < \frac{1}{e^{\frac{x}{k}}},$$

$$1 - \frac{x}{k+1} < \frac{1}{e^{\frac{x}{k+1}}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$1 - \frac{x}{n} < \frac{1}{e^{\frac{x}{n}}},$$

et, en multipliant membre à membre,

$$\left(1 - \frac{x}{k}\right)\left(1 - \frac{x}{k+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{n}\right) < \frac{1}{e^{x\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n}\right)}}.$$

Or l'exposant de e admet en facteur la série harmonique; donc le premier membre peut devenir inférieur à toute quantité donnée, et l'on a le droit d'écrire

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{x+1} + \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)} - \cdots$$
$$= (1-x)\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{3}\right)\cdots$$

pour toute valeur positive de x.

Ch. B.

MÉMOIRE SUR LES TRANSFORMATIONS DU SECOND ORDRE DANS LES FIGURES PLANES;

PAR M. E. AMIGUES,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nice.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Les transformations du second ordre, bien qu'elles soient connues depuis un demi-siècle (*), n'ont pas donné dans la Géométrie supérieure les résultats qu'il était permis d'espérer. Peut-être n'a-t-on pas étudié avec assez de soin les ressources de cette méthode. Les recherches que nous avons faites à ce sujet nous ont conduit à un certain nombre de lois, qui pourront avoir quelque intérêt pour les géomètres.

2. Soient $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ les coordonnées cartésiennes d'un point dans un plan, $\frac{x'}{z'}$ et $\frac{y'}{z'}$ les coordonnées cartésiennes d'un point dans le même plan ou dans un plan différent. Deux relations entre ces quantités $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, $\frac{x'}{z'}$ et $\frac{y'}{z'}$ définissent un mode de transformation des figures. Supposons ces relations algébriques et telles qu'à tout point de chaque figure corresponde dans l'autre un point et un seul. Cette dernière condition revient à supposer que les relations sont du premier degré et homogènes, soit en x, y, z, soit en x', y', z'. Elles sont donc de la forme sui-

(*) MAGNUS, *Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes en Géométrie* (*Journal de Crelle*; 1831).

vante :

$$Lx + My + Nz = 0,$$
$$L'x + M'y + N'z = 0,$$

L, M, N, L', M', N' étant des fonctions linéaires et homogènes de x', y', z'.

On peut alors les écrire ainsi :

$$\frac{x}{MN' - NM'} = \frac{y}{NL' - LN'} = \frac{z}{LM' - ML'}.$$

Il peut arriver que les dénominateurs se réduisent au premier degré. On a alors une transformation homographique.

Mais, en général, ces dénominateurs sont des fonctions du second degré U, V, W, et les relations prennent la forme suivante :

$$\frac{x}{U} = \frac{y}{V} = \frac{z}{W}.$$

Les fonctions U, V, W ne sont pas arbitraires; car, s'il en était ainsi à tout point donné (x, y, z) correspondraient en général quatre points (x', y', z') communs aux trois coniques représentées par les équations

$$\frac{x}{U} = \frac{y}{V} = \frac{z}{W}.$$

Pour qu'à un point (x, y, z) corresponde un seul point (x', y', z'), il est indispensable que les trois coniques ci-dessus aient trois points communs qui restent invariables quand le point (x, y, z) change, de telle sorte que leur quatrième point commun corresponde seul au point (x, y, z). Prenons ces trois points communs pour sommets d'un triangle de référence dans le plan P' qui contient le point (x', y', z'), et pour faciliter les interprétations géométriques, adoptons des paramètres de référence égaux à l'unité. Toutes les coniques ci-dessus doivent être circonscrites au triangle de référence, en particulier les trois

coniques représentées par les équations

$$U = 0, \quad V = 0, \quad W = 0.$$

Il faut donc que l'on ait

$$U = aY'Z' + bX'Z' + cX'Y',$$
$$V = a_1Y'Z' + b_1X'Z' + c_1X'Y',$$
$$W = a_2Y'Z' + b_2X'Z' + c_2X'Y'.$$

Ainsi les facteurs U, V, W ont une forme particulière, et les relations qui définissent la transformation deviennent

$$\frac{x}{aY'Z' + bX'Z' + cX'Y'} = \frac{y}{a_1Y'Z' + b_1X'Z' + c_1X'Y'}$$
$$= \frac{z}{a_2Y'Z' + b_2X'Z' + c_2X'Y'}.$$

Multipliant les deux termes du premier rapport par l, ceux du second par m, ceux du troisième par n, puis divisant la somme des numérateurs par celle des dénominateurs, on obtient un rapport égal à chacun des proposés. Si d'ailleurs on choisit l, m, n d'après les conditions

$$la + ma_1 + na_2 = 0,$$
$$lb + mb_1 + nb_2 = 0,$$

ce rapport se réduit à

$$\frac{lx + my + nz}{(lc + mc_1 + nc_2)X'Y'}.$$

On trouve de même deux rapports analogues égaux, de sorte que les formules de transformation peuvent s'écrire ainsi :

$$\frac{lx + my + nz}{(lc + mc_1 + nc_2)X'Y'} = \frac{l_1x + m_1y + n_1z}{(l_1a + m_1a_1 + n_1a_2)Y'Z'}$$
$$= \frac{l_2x + m_2y + n_2z}{(l_2b + m_2b_1 + n_2b_2)Z'X'}.$$

(*A suivre.*)

CORRESPONDANCE.

1. M. Realis nous a adressé une solution de la question 1229, qu'il fait suivre des remarques suivantes :

« L'équation considérée est un cas particulier, le plus simple, de celles que l'on désigne sous le nom d'*équations de Moivre*, et à l'égard desquelles il est facile d'établir des propositions analogues à l'énoncé 1229. On peut voir, sur ces équations, un article inséré aux *Nouvelles Annales*, t. IV de la 2e série, p. 209 et p. 289. On y trouvera, au n° 9, des formules qui mettent en évidence l'extension de la proposition ci-dessus à l'équation de Moivre du degré n, dans le cas où toutes les racines sont réelles. Voyez aussi, pour ce dernier cas, l'*Introduction* qui précède le *Traité du Calcul différentiel et du Calcul intégral* de Lacroix. »

AVIS.

Pour éviter des rectifications assez nombreuses au sujet des énoncés des *Questions proposées*, nous prions les personnes qui nous adressent soit des théorèmes à démontrer, soit des formules à établir, de vouloir bien y joindre leurs démonstrations.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. Recueil complémentaire d'exercices sur le Calcul infinitésimal; par M. *F. Tisserand*, directeur de

l'Observatoire de Toulouse. — Paris, Gauthier-Villars; 1877. In-8.

2. Recueil d'exercices sur la Mécanique rationnelle, à l'usage des candidats à la licence et à l'agrégation, par M. *A. de Saint-Germain*, professeur à la Faculté des Sciences de Caen. — Paris, Gauthier-Villars; 1877. In-8.

3. Cours d'Algèbre supérieure, par M. *J.-A. Serret*, membre de l'Institut; 4e édition, t. Ier. — Paris, Gauthier-Villars; 1877. In-8.

4. Traité de Mécanique générale, comprenant les Leçons professées à l'École Polytechnique, par M. *H. Resal*, membre de l'Institut. — Paris, Gauthier-Villars; 1873, 1874, 1876. 4 vol. in-8.

Tome Ier. — Cinématique. — Théorèmes généraux de la Mécanique. — De l'équilibre et du mouvement des corps solides.

Tome II. — Du mouvement des systèmes matériels et de ses causes. — Thermodynamique.

Tome III. — Des machines considérées au point de vue des transformations de mouvement et de la transformation du travail des forces. — Application de la Mécanique à l'horlogerie.

Tome IV. — Des moteurs animés. — De l'eau et du vent comme moteurs. — Des machines hydrauliques et élévatoires. — Des machines à vapeur, à air chaud et à gaz.

5. Traité d'Algèbre élémentaire, à l'usage des candidats au baccalauréat et aux écoles du gouvernement, par M. *E. Lauvernay*, ancien élève de l'École Normale, agrégé de l'Université, professeur au lycée d'Amiens. — Paris, G. Masson; 1877. In-8.

MÉMOIRES RÉCENTS.

1. *Nuova teoria delle soluzioni singolari delle equazioni differenziali di primo ordine e secondo grado tra due variabili.* Communicazione del professore *F. Casorati.* Estratto dal tomo III, serie 2ª, degli *Atti della reale Accademia dei Lincei.*

2. *Sulla superficie del quinto ordine dotata d'una curva doppia del quinto ordine.* Memoria presentata per la laurea all'Università di Roma da *Ettore Caporali.* Estratta dagli *Annali di Matematica pura ed applicata,* serie 2ª, tomo VII.

3. *Sur le développement de la fonction perturbatrice suivant la forme adoptée par Hansen dans la théorie des petites planètes*; par M. *J. Hoüel,* professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Extrait de l'*Archiv mathematiky a fysiky,* t. I.

4. *Sur certaines conséquences de la formule électrodynamique d'Ampère,* par *Ph. Gilbert,* professeur à l'Université de Louvain. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 1re année.

5. *Zur Theorie der elliptischen Functionen,* von Professor *Eduard Weyr.* Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences royale de Bohême.*

6. *Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques,* par M. *G. Zeuthen,* à Copenhague. Extrait du tome X des *Mathematische Annalen.*

7. *Note sur les singularités des courbes planes;* par M. *G. Zeuthen,* à Copenhague. Extrait du tome X des *Mathematische Annalen.*

8. *Sur les formes quadratiques positives*, par MM. *A. Korkine* et *G. Zolotareff*, professeurs à l'Université de Saint-Pétersbourg. Extrait du t. XI des *Mathematische Annalen.*

9. *Ueber das arithmetisch-geometrische Mittel aus vier Elementen*, von *C. W. Borchardt.* Aus dem *Monatsberichte der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1876.

10. *Sulle soluzioni singolari delle equazioni alle derivate parziali.* Nota del professore *F. Casorati.* Estratto dai *Rendiconti del R. Istituto lombardo di scienze e lettere*, serie 2ª, t. IX.

11. *Ueber eine geometrische Verwandtschaft in Bezug auf Curven dritter Ordnung und dritter Classe*, von Dr *Karl Zahradnik*, Prof. an der K. Franz Josef-Universität in Agram. Aus dem LXXV Bande der *Sitzb. der K. Akad. der Wissensch.*

12. *Note on the plückerian characteristics of epi-and hypo-trochoids and allied curves*, by *Samuel Roberts.* Extracted from the *Proceedings of the London mathematical Society*, vol. IV, nº 63.

13. *On a simplified method of obtaining the order of algebraical conditions*, by *S. Roberts.* Extracted from the *Proceedings of the London mathematical Society*, vol. VI, nº 82.

14. *On three-bar motion in plane space*, by *S. Ro-*

berts. Extracted from *Proceedings of the London mathematical Society*, vol. VI, nos 89 et 90.

15. *Sopra un sistema omaloidico formato da superficie d'ordine n con un punto (n — 1)-plo*, per *R. de Paolis*. Estratto dal volume XIII del *Giornale di Matematiche*.

16. *Recherches sur les développoïdes des divers ordres*, par M. *J.-N. Haton de la Goupillière*. Extrait des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 2e année, 1877.

17. *Sui centri di gravità*, per *Achille Minozzi*. Estratto dal volume XV del *Giornale di Matematiche*.

18. Sulla teoria del movimento d'una figura piana nel suo piano, per *Achille Minozzi*. Naples, 1877. In-4°.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1180

(voir 2e série, t. XIV, p. 336);

PAR M. ÉDOUARD LUCAS.

Une pile de boulets à base carrée ne contient un nombre de boulets égal au carré d'un nombre entier que lorsqu'elle en contient vingt-quatre sur le côté de la base. (ÉDOUARD LUCAS.)

On sait, en effet, que la somme des carrés des x premiers nombres entiers a pour expression

$$\frac{x(x+1)(2x+1)}{6};$$

on doit donc poser

$$x(x+1)(2x+1)=6y^2;$$

mais les facteurs x, $x+1$ et $2x+1$ sont premiers entre eux, et l'équation précédente donne les neuf décompositions suivantes :

I.	$x=6u^2$,	$x+1=v^2$,	$2x+1=w^2$;
II.	$x=3u^2$,	$x+1=2v^2$,	$2x+1=w^2$;
III. ...	$x=3u^2$,	$x+1=v^2$,	$2x+1=2w^2$;
IV. ...	$x=2u^2$,	$x+1=3v^2$,	$2x+1=w^2$;
V.	$x=2u^2$,	$x+1=v^2$,	$2x+1=3w^2$;
VI. ...	$x=u^2$,	$x+1=6v^2$,	$2x+1=w^2$;
VII. .	$x=u^2$,	$x+1=3v^2$,	$2x+1=2w^2$;
VIII. ..	$x=u^2$,	$x+1=2v^2$,	$2x+1=3w^2$;
IX. ...	$x=u^2$,	$x+1=v^2$,	$2x+1=6w^2$.

Nous allons examiner successivement ces neuf hypothèses.

I. On a

$$(1)\qquad w^2-1=12u^2,$$

et, par suite, puisque les facteurs $w+1$ et $w-1$ ont leur plus grand commun diviseur égal à 2, on en déduit, en admettant les valeurs négatives de w,

$$(2)\qquad w+1=2\alpha^2;$$

mais, d'autre part,

$$(3)\qquad w^2+1=2v^2.$$

Les équations (2) et (3) doivent être vérifiées en même temps. Le système de ces deux équations a été traité complétement par M. Gerono (*); il n'admet pour solu-

(*) *Voir* même tome, p. 231.

tions entières que les valeurs $w = \pm 1$ et $w = \pm 7$. Ces valeurs vérifient d'ailleurs l'équation (1); on en déduit $x = 0$ et $x = 24$. Ainsi

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 24^2 = \frac{24.25.49}{6} = 4900.$$

II. Cette hypothèse conduit à l'équation

$$2v^2 - 3u^2 = 1,$$

impossible suivant le module 3.

III. On déduit de cette décomposition l'équation

$$2w^2 - 6u^2 = 1,$$

impossible suivant le module 2.

IV. On obtient aisément

$$w^2 + 1 = 6v^2,$$

équation impossible suivant le module 3.

V. Cette hypothèse donne l'équation

$$4u^2 + 1 = 3w^2,$$

impossible suivant le module 3 ou le module 4.

VI. On trouve l'équation, impossible suivant le module 3,

$$6v^2 = u^2 + 1.$$

VII. On trouve de même l'impossibilité

$$3v^2 = u^2 + 1.$$

VIII. Cette hypothèse ne donne que la solution $x = 1$, d'après la remarque qui termine l'article précédent.

IX. On est conduit à l'impossibilité

$$2u^2 + 1 = 6w^2.$$

Ainsi, en résumé, la *somme des carrés des x premiers nombres entiers n'est jamais égale à un carré parfait, excepté pour $x = 24$.*

QUESTIONS.

1252. Soient O et XY un point et une droite fixes. Du point O, on mène jusqu'à la droite :

OA quelconque ;

OB perpendiculaire à OA ;

OC bissectrice de l'angle droit AOB ;

OD perpendiculaire à OC.

Déterminer le minimum de la somme AB + CD des deux hypoténuses.

1253. On propose de résoudre les équations

$$zy - r^2 = A, \quad xz - s^2 = B, \quad xy - t^2 = C,$$
$$st - rx = D, \quad tr - sy = E, \quad rs - zt = F.$$

(J.-Ch. Dupain).

1254. Démontrer la formule suivante, où C_m^n est le nombre des combinaisons de m objets n à n :

$$k C_a^k + (k-1) C_a^{k-1} C_b^1 + (k-2) C_a^{k-2} C_b^2 + \ldots = \frac{a}{a+b} C_{a+b}^k . k.$$

(H. Laurent).

ERRATA.

Page 262, ligne 6, *au lieu de* $= \frac{a^2 \nu}{a^2 \mu}$, *lisez* $= \frac{a^2 \nu}{b^2 \mu}$.

Page 335, ligne 11, *au lieu de* $pn \cos \frac{A}{2}$, *lisez* $mn \cos \frac{A}{2}$.

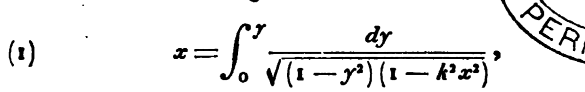
THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

[SUITE (*).]

ÉTUDE ET DISCUSSION DE LA FONCTION sin am x.

Considérons l'intégrale



$$(1)\qquad x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2x^2)}},$$

qui est la plus simple de celles auxquelles se ramènent les intégrales que nous avons considérées plus haut. Legendre posait

$$y = \sin\varphi,$$

il obtenait alors la relation

$$x = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}};$$

φ était ce qu'il appelait l'amplitude de l'intégrale x. Alors, en posant $\varphi = \operatorname{am} x$, on a

$$y = \sin\operatorname{am} x;$$

le nom de $\sin\operatorname{am} x$ est resté à y considéré comme fonction de x. Nous adopterons la notation de Gudermann, plus simple que la précédente, due à Jacobi, et nous aurons

$$\begin{aligned}
y &= \sin\operatorname{am} x = \operatorname{sn} x,\\
\sqrt{1-y^2} &= \cos\operatorname{am} x = \operatorname{cn} x,\\
\sqrt{1-k^2y^2} &= \operatorname{dn} x,\\
\frac{y}{\sqrt{1-y^2}} &= \operatorname{tang}\operatorname{am} x = \operatorname{tn} x.
\end{aligned}$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVI, p. 78, 211, 361, 385.

Nous reviendrons d'ailleurs sur ces formules pour en préciser le sens et déterminer le signe qui convient à chaque radical. Dans ce qui va suivre, k sera quelconque, mais, dans la pratique, k sera généralement réel et moindre que l'unité.

D'après ce qu'on a vu au paragraphe précédent :

1° La fonction $\operatorname{sn} x$ sera continue, monodrome et monogène dans toute l'étendue du plan.

2° Elle possédera deux périodes, l'une

$$2\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} - 2\int_0^{-1} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}},$$

correspondant aux deux lacets successifs et relatifs aux points critiques -1 et $+1$. Nous l'appellerons $4K$; nous observerons qu'elle est réelle quand k est réel, et d'ailleurs moindre que l'unité en valeur absolue,

$$K = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}};$$

l'autre période est

$$2\int_0^1 \frac{dy}{\Delta} - 2\int_0^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{\Delta},$$

Δ désignant, pour abréger, le radical; on peut le représenter par $2K'\sqrt{-1}$, en posant

$$K'\sqrt{-1} = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{\Delta}.$$

Si l'on fait

$$k^2 + k'^2 = 1, \quad 1 - k^2y^2 = t^2,$$

on trouve

$$K' = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-t^2)(1-k'^2t^2)}}.$$

k est ce que l'on appelle le *module*,
k' est le *module complémentaire*,
K est l'*intégrale complète*,
K' est l'*intégrale complète complémentaire*.

Ainsi les côtés du parallélogramme des périodes sont $4K$ et $2K'\sqrt{-1}$.

3° La fonction $\operatorname{sn} x$ passe deux fois par la même valeur dans le parallélogramme, et, d'après la discussion faite au paragraphe précédent,

$$\operatorname{sn}(2K - x) = \operatorname{sn} x.$$

4° La fonction $\operatorname{sn} x$ s'annule en particulier deux fois dans chaque parallélogramme, et comme on a évidemment $\operatorname{sn} 0 = 0$, les zéros de $\operatorname{sn} x$ sont donnés par les formules 0 et $2K$, ou, plus généralement,

$$\left.\begin{array}{l} 4Km + 2K'n\sqrt{-1} \\ 2(2m+1)K + 2K'n\sqrt{-1} \end{array}\right\} \quad \text{ou} \quad 2Km + 2K'n\sqrt{-1}.$$

5° Cherchons les infinis de $\operatorname{sn} x$. L'un d'eux sera donné par la formule

$$\alpha = \int_0^\infty \frac{dy}{\Delta} \quad \text{ou} \quad 2\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\Delta},$$

et l'on peut supposer que le contour d'intégration soit rectiligne en laissant d'un même côté de lui-même les points critiques $+1$ et $+\frac{1}{k}$, et, de l'autre côté, -1 et $-\frac{1}{k}$; mais un tel contour peut être remplacé par un demi-cercle de rayon infini décrit sur lui-même comme diamètre, à la condition d'y adjoindre les deux lacets relatifs aux points critiques. Or le contour circulaire

donne une intégrale nulle ; on a donc

$$2\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\Delta} = 2\int_{1}^{\frac{1}{k}} \frac{dy}{\Delta} = 2K'\sqrt{-1},$$

et, par suite,

$$\alpha = K'\sqrt{-1}.$$

Ainsi l'un des infinis de $\operatorname{sn} x$ est $K'\sqrt{-1}$, et, comme $\operatorname{sn}(2K - x) = \operatorname{sn} x$, un autre infini sera $2K - K'\sqrt{-1}$. En général, les infinis de $\operatorname{sn} x$ seront

$$\left.\begin{matrix} 4mK + (2n+1)K'\sqrt{-1} \\ 2(2m+1)K + (2n+1)K'\sqrt{-1} \end{matrix}\right\} \text{ ou } \quad 2Km + (2n+1)K'\sqrt{-1}.$$

6° On a, comme il est facile de le voir,

$$\operatorname{sn} x = -\operatorname{sn}(-x).$$

7° $\operatorname{sn} K'\sqrt{-1}$ étant infini, posons, dans l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)},$$

$y = \frac{1}{kz}$, $x = K'\sqrt{-1} + t$: nous aurons

$$\frac{dz}{dt} = \mp\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)};$$

d'où nous concluons, z s'annulant avec t,

$$z = \pm \operatorname{sn} t = \pm \operatorname{sn}(-K'\sqrt{-1} + x) = \pm \operatorname{sn}(K'\sqrt{-1} + x),$$

et, par suite,

$$\operatorname{sn}(K'\sqrt{-1} + x) = \frac{\pm 1}{k \operatorname{sn} x},$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{sn} K'\sqrt{-1} = \infty.$$

8° Enfin l'on a

$$\operatorname{sn}(K) = 1, \quad \operatorname{sn}(K + K'\sqrt{-1}) = \frac{1}{k}.$$

SUR LES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES.

La discussion faite au paragraphe précédent nous a révélé l'existence de fonctions monodromes et monogènes possédant deux périodes. Ces fonctions (et les fonctions elliptiques sont les plus simples d'entre elles) jouissent de propriétés communes qui peuvent en simplifier l'étude; nous commencerons par faire connaître ces propriétés.

Sans doute une bonne partie de la théorie des fonctions elliptiques pourrait être faite, et même a été édifiée avant la découverte, toute récente, de ces propriétés; mais leur connaissance explique bien des méthodes d'investigation qui pourraient, sans cela, être regardées comme des artifices de calcul heureux, mais peu propres à éclairer sur la méthode d'invention.

Théorème I. — *Il n'existe pas de fonction monodrome et monogène possédant deux périodes réelles et distinctes.*

En effet, si la fonction $f(x)$ possédait les deux périodes ω et ϖ, on aurait

$$f(x + m\omega + n\varpi) = f(x),$$

m et n désignant deux entiers quelconques. Or, si ω et ϖ sont commensurables, soit α leur plus grande commune mesure et

$$\omega = k\alpha, \quad \varpi = l\alpha.$$

Si l'on pose

$$mk + nl = 1,$$

cette équation aura toujours une solution, car k et l sont premiers entre eux. On aura donc

$$mk\alpha + nl\alpha = \alpha \quad \text{ou} \quad m\omega + n\varpi = \alpha,$$

par suite

$$f(x+\alpha)=f(x);$$

α serait donc une période et ω et ϖ seraient ses multiples. Si ω et ϖ sont incommensurables, on pourra toujours satisfaire à la formule

$$m\omega+n\varpi=\varepsilon,$$

où ε est très-petit. Il suffit, en effet, pour cela, de réduire $\frac{\varpi}{\omega}$ en fraction continue : soit $\frac{p}{q}$ une réduite quelconque, $\frac{p'}{q'}$ la réduite suivante; $\frac{\varpi}{\omega}$ sera compris entre ces deux réduites dont la différence $\frac{1}{qq'}$, tend vers zéro. On pourra donc poser

$$\frac{\varpi}{\omega}=\frac{p}{q}+\frac{\theta}{qq'}$$

et

$$m\omega+n\varpi=\omega\left[m+n\frac{p}{q}+n\frac{\theta}{qq'}\right]=\omega\left[\frac{mq+np}{q}+\frac{n\theta}{qq'}\right].$$

Or on peut, en supposant $\frac{p}{q}$ irréductible (ce qui a lieu pour les réduites d'une fraction continue), prendre $mq+np=1$; mais m et n sont le numérateur et le dénominateur de la réduite qui précède $\frac{p}{q}$; donc $\frac{n}{q'}<1$ et $m\omega+n\varpi$ se réduit à une quantité moindre que $\frac{2\omega}{q}$, c'est-à-dire aussi petite que l'on veut ε. On aurait donc

$$f(x+\varepsilon)=f(x) \quad \text{ou} \quad f(x+\varepsilon)-f(x)=0,$$

ε étant aussi petit que l'on veut. La fonction

$$f(x+\varepsilon)-f(x)=0$$

admettrait donc une infinité de racines $\varepsilon, 2\varepsilon, 3\varepsilon, \ldots$ dans un espace fini du plan; l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int\frac{f'(x+z)}{f(x+z)-f(x)}\,dz$$

serait donc infinie, ce qui est absurde. Il est évident que deux périodes dont le rapport est réel ne peuvent pas coexister non plus. En effet, soit r le rapport des périodes; on pourra poser

$$\omega = r\varpi,$$

et l'on aura

$$f(x+\omega)=f(x),\quad f(x+r\omega)=f(x)$$

ou

$$\mathrm{F}\left(\frac{x}{\omega}+1\right)=\mathrm{F}\left(\frac{x}{\omega}\right),\quad \mathrm{F}\left(\frac{x}{\omega}+r\right)=\mathrm{F}\left(\frac{x}{\omega}\right),$$

en désignant par $\mathrm{F}\left(\frac{x}{\omega}\right)$ la fonction $f(x)$; x étant quelconque, on aurait

$$\mathrm{F}(x+1)=\mathrm{F}(x),\quad \mathrm{F}(x+r)=\mathrm{F}(x),$$

et la fonction F aurait les périodes réelles 1 et r.

Théorème II. — *Une fonction monodrome, monogène et continue ne saurait avoir plus de deux périodes.*

En effet, soient $a+b\sqrt{-1}$, $a'+b'\sqrt{-1}$, $a''+b''\sqrt{-1}$ trois périodes de la fonction $f(x)$, s'il est possible. Je dis que l'on pourra toujours trouver trois entiers m, m', m'', tels que l'on ait

$$a'''=ma+m'a'+m''a''<\varepsilon,$$
$$b'''=mb+m'b'+m''b''<\varepsilon,$$

ε étant un nombre si petit que l'on voudra. En effet,

considérons la quantité

$$a''' b'' - b''' a'' = m(ab'' - ba'') + m'(a' b'' - b' a'');$$

on pourra toujours, comme on l'a vu dans la démonstration du théorème précédent, choisir m et m' de telle sorte que $a''' b'' - b''' a''$ soit moindre qu'une quantité donnée, et même de telle sorte que l'on ait

$$a''' - b''' \frac{a''}{b''} \quad \text{ou} \quad m \frac{ab'' - ba''}{b''} + m' \frac{a' b'' - b' a''}{b''} < \delta,$$

c'est-à-dire en valeur absolue

$$(1) \qquad a''' < \delta + b''' \frac{a''}{b''};$$

mais m et m' ayant été ainsi déterminés, on pourra toujours choisir m'' de telle sorte que l'on ait en valeur absolue

$$\frac{b'''}{b''} \quad \text{ou} \quad \frac{mb}{b''} + m' \frac{b'}{b''} + m'' < \frac{1}{2},$$

et, par conséquent,

$$(2) \qquad \frac{b''' a''}{b''} < \frac{1}{2} a''.$$

On pourra donc, en vertu de (1), prendre

$$a''' < \delta + \frac{(a'')}{2},$$

(a'') désignant la valeur absolue de a'', ou, en définitive, prendre $a''' \leq \frac{(a'')}{2}$. Or, de (2), on tire $b''' < \frac{(b'')}{2}$; ainsi on pourra prendre a''' et b''' moindres en valeur absolue que les demi-valeurs absolues de a'' et b'''. Cela étant, considérons les quantités

$$a^{\text{IV}} = n' a' + n'' a'' + n''' a''',$$
$$b^{\text{IV}} = n' b' + n'' b'' + n''' b''';$$

on pourra choisir les entiers n', n'', n''' de telle sorte que l'on ait en valeur absolue $a^{\text{iv}} < \frac{a'''}{2}$, $b^{\text{iv}} < \frac{b'''}{2}$. On pourra déterminer d'une façon analogue des nombres $a^{\text{v}} < \frac{a^{\text{iv}}}{2}$, $b^{\text{v}} < \frac{b^{\text{iv}}}{2}$, et ainsi de suite; mais a''', a^{iv}, a^{v}, ... sont des fonctions linéaires à coefficients entiers de a, a', a''; de même b''', b^{iv}, b^{v}, ... sont des fonctions linéaires à coefficients entiers de b, b', b''; ces fonctions linéaires vont en décroissant, au moins aussi rapidement que les termes de la progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$; donc elles peuvent être prises moindres que toute quantité donnée. C. Q. F. D.

Si donc la fonction $f(x)$ admettait les trois périodes $a + b\sqrt{-1}$, $a' + b'\sqrt{-1}$, $a'' + b''\sqrt{-1}$, elle admettrait une période $a^{(i)} + b^{(i)}\sqrt{-1}$ de module aussi petit que l'on voudrait; $f(x+\varepsilon) - f(x) = 0$ aurait donc une infinité de racines dans un espace limité, ce qui est absurde. Il n'y aurait d'exception à cette conclusion que si l'un des nombres a_i et son correspondant b_i s'annulaient rigoureusement. Mais alors, en appelant ω, ω', ω'', pour abréger, les trois périodes et en désignant par m, m', m'' trois entiers, on aurait

$$(1) \qquad m\omega + m'\omega' + m''\omega'' = 0.$$

Soient n'_1 le plus grand commun diviseur de m et m', et μ, μ' les quotients de m et m' par m'_1; si l'on pose

$$\mu\omega + \mu'\omega' = \omega'_1,$$
$$n\omega + n'\omega' = \omega_1,$$

on pourra toujours choisir n et n' de telle sorte que le déterminant $\mu n' - n\mu'$ soit égal à 1 pour des valeurs entières de n et n'; alors ω et ω' s'exprimeront en fonc-

tions linéaires de ω'_1 et ω_1, à coefficients entiers. On aura ensuite, au lieu de (1),

$$m'_1 \omega'_1 + m'' \omega'' = 0.$$

Divisant les deux membres de cette formule par le plus grand commun diviseur de m'_1 et de m'', elle prend la forme

$$\mu'_1 \omega'_1 + \mu'' \omega'' = 0,$$

et si l'on prend $n'_1 \mu'' - n'' \mu'_1 = 1$, ce qui est possible, et si l'on pose

$$n'_1 \omega'_1 + n'' \omega'' = \omega''_2,$$

ω'_1 et ω'' seront des multiples de ω''_2. En résumé, ω et ω' sont fonctions linéaires et à coefficients entiers de ω'_1 et de ω_1, c'est-à-dire de ω''_2 et de ω_1. Il en est de même de ω''; nos trois périodes se réduisent donc à deux de la forme $p\omega''_2 + q\omega_1$, p et q désignant des entiers.

THÉORÈME DE M. HERMITE.

Théorème. — *L'intégrale d'une fonction doublement périodique prise le long d'un parallélogramme de périodes est nulle.*

Ce théorème, ou plutôt cette remarque fondamentale, est due à M. Hermite : elle est presque évidente. En effet, le long de deux côtés opposés, la fonction prend les mêmes valeurs, mais la différentielle de la variable y prend des valeurs égales et de signes contraires; la somme des intégrales prises le long des côtés opposés est donc nulle, et il en est de même de l'intégrale totale.

Première conséquence. — Une fonction doublement périodique s'annule au moins une fois et devient infinie au moins une fois dans chaque parallélogramme des périodes, car sans quoi elle ne deviendrait jamais ni nulle

ni infinie; mais le théorème de M. Hermite nous apprend que dans chaque parallélogramme il y a au moins deux infinis et deux zéros.

En effet, si dans un parallélogramme il n'y avait qu'un infini, l'intégrale prise le long du parallélogramme serait égale au résidu relatif à cet infini multiplié par $2\pi\sqrt{-1}$. Or ce résidu ne saurait être nul; donc il ne saurait y avoir un seul infini dans le parallélogramme : il ne saurait non plus y avoir un seul zéro, car la fonction inverse n'aurait qu'un seul infini.

Deuxième conséquence. — *Dans chaque parallélogramme, il y a autant de zéros que d'infinis.*

En effet, soit $f(z)$ une fonction à deux périodes, $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{f'(z)}{f(z)}$ aura les mêmes périodes; en l'intégrant le long d'un parallélogramme, on doit trouver zéro, ou la différence entre le nombre des zéros et des infinis de $f(z)$: cette différence est donc nulle.

Troisième conséquence. — En intégrant

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{zf'(z)}{f(z)}$$

le long du parallélogramme des périodes, et en appelant ω et ϖ les périodes, on trouve la différence entre la somme des zéros et celle des infinis contenus dans ce parallélogramme; elle est

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left[-\omega\int\frac{f'(z)}{f(z)}dz+\varpi\int\frac{f'(z)}{f(z)}dz\right].$$

La première intégrale est prise le long de la période ϖ, et la seconde le long de la période ω; en effectuant, on a

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\left[-\omega\log\frac{f(z+\varpi)}{f(z)}+\varpi\log\frac{f(z+\omega)}{f(z)}\right]$$

ou

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}[\varpi \log 1 - \omega \log 1] = m\varpi + n\omega;$$

cette quantité est une période.

Quatrième conséquence. — *Une fonction doublement périodique, qui admet n infinis, ou, ce qui revient au même, n zéros dans un parallélogramme de périodes, passe aussi n fois par la même valeur a à l'intérieur de ce parallélogramme.*

En effet, soit $f(x)$ une telle fonction, $f(x) - a$ aura aussi n infinis et, par suite, n zéros; donc $f(x)$ passe n fois par la valeur a.

Une fonction doublement périodique qui possède n infinis dans un parallélogramme élémentaire est dite *d'ordre n*.

La somme des valeurs de la variable x, pour lesquelles $f(x)$ prend la même valeur, est constante à des multiples des périodes près; en effet, d'après ce que l'on a vu (troisième conséquence), $f(z) - a$ est nul pour n valeurs de z qui, à un multiple des périodes près, ont une somme égale à celle des infinis de $f(x)$.

Il n'y a pas de fonctions du premier ordre, puisque toute fonction à deux périodes a au moins deux infinis dans chaque parallélogramme élémentaire, et les fonctions doublement périodiques les plus simples sont au moins du second ordre.

Nous allons maintenant essayer d'établir directement l'existence des fonctions monodromes, monogènes, continues et doublement périodiques.

REMARQUES RELATIVES AUX PRODUITS INFINIS.

Nous allons bientôt avoir à considérer des produits de la forme

$$\varphi(x) = \prod_{m=-\infty}^{m=+\infty} \prod_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left(1 + \frac{x}{a + m\omega + n\omega'}\right),$$

et il est bon de montrer dès à présent que la valeur du produit en question dépend de la manière dont on l'effectue, c'est-à-dire, en définitive, de l'ordre des facteurs.

Considérons, en effet, m et n comme les coordonnées d'un point, et faisons le produit de tous les facteurs correspondant à des valeurs de m et n intérieures à une courbe C_1 et de tous les facteurs correspondant à des valeurs de m et n intérieures à une courbe C_2. Soient P_1 et P_2 les produits, on aura

$$\frac{P_1}{P_2} = \prod \left(1 + \frac{x}{a + m\omega + n\omega'}\right),$$

m et n désignant les valeurs entières comprises entre les deux contours C_1 et C_2. On en tire

$$\begin{aligned} \log P_1 - \log P_2 &= \Sigma \log\left(1 + \frac{x}{a + m\omega + n\omega'}\right) \\ &= x \sum \frac{1}{a + m\omega + n\omega'} - \frac{x^2}{2} \sum \left(\frac{1}{a + m\omega + n\omega'}\right)^2 + \ldots. \end{aligned}$$

On voit que $\log P_1 - \log P_2$ peut être infini ; mais il peut aussi être fini : c'est ce qui arrivera quand $\sum \frac{1}{a + m\omega + n\omega'}$ sera fini. C'est ce qui arrivera encore lorsque, $\sum \frac{1}{a + m\omega + n\omega'}$ étant nul, parce que les deux

contours ont pour centre l'origine, $\sum \frac{1}{(a+m\omega+n\omega')^2}$ ne sera pas nul : ce cas remarquable a été examiné par M. Cayley. En désignant par A la valeur de cette somme, on aura, en négligeant des termes infiniment petits,

$$\log P_1 - \log P_2 = -\frac{Az^2}{2},$$

et, par suite,

$$\frac{P_1}{P_2} = e^{-\frac{Az^2}{2}}.$$

L'ordre dans lequel on effectue le produit, même en prenant autant de termes positifs que de termes négatifs dans chaque produit partiel, peut influer sur le résultat en introduisant une exponentielle de la forme $e^{-\frac{Az^2}{2}}$; c'est ce qui nous permettra d'expliquer un paradoxe que nous rencontrerons plus loin.

SUR LES FONCTIONS AUXILIAIRES DE JACOBI.

Essayons maintenant de former directement une fonction monodrome et monogène admettant les périodes $4K$ et $2K'\sqrt{-1}$ de $\operatorname{sn} x$. Si l'on observe que l'on a

$$\sin x = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots,$$

ou

$$\sin x = \lim \prod_{-n}^{+n}\left(1-\frac{x}{n\pi}\right) \quad \text{pour } n=\infty,$$

en supposant $1-\frac{x}{0\pi}$ remplacé par x, on sera tenté de

poser

$$\operatorname{sn} x = \frac{\Pi\left(1 - \frac{x}{2Km + 2K'n\sqrt{-1}}\right)}{\Pi\left[1 - \frac{x}{2Km + (2n+1)K'\sqrt{-1}}\right]},$$

en remplaçant $1 - \frac{x}{2K0 + 2K'0\sqrt{-1}}$ par x, ou tout au moins y aura-t-il lieu de se demander si le second membre de cette formule ne serait pas doublement périodique. On voit d'ailleurs que ce second membre a été formé de manière à s'annuler et à devenir infini en même temps que $\operatorname{sn} x$. Malheureusement, d'après ce que l'on a vu au paragraphe précédent, les deux termes du quotient que nous considérons sont divergents, et ce quotient n'est pas bien déterminé; quoi qu'il en soit, en groupant convenablement les termes, on peut obtenir une fonction bien définie qu'il convient d'étudier.

Considérons, en particulier, le produit

$$\Pi\left(1 - \frac{x}{2Km + 2K'n\sqrt{-1}}\right)$$

où

$$\left(1 - \frac{x}{2K0 + 2K'0\sqrt{-1}}\right),$$

doit être remplacé par x.

En faisant d'abord varier m seul, il devient

$$\Pi \frac{2Km + 2K'n\sqrt{-1} - x}{2Km + 2K'n\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{2K'n\sqrt{-1} - x}{2K'n\sqrt{-1}} \Pi\left(1 - \frac{2K'n\sqrt{-1} - x}{2Km}\right)$$

$$: \Pi\left(1 - \frac{2K'n\sqrt{-1}}{2Km}\right),$$

ou, en observant que $x\prod\left(1-\frac{x}{m}\right)$ est égal à $\frac{1}{\pi}\sin\pi x$,

$$\frac{\sin\frac{2K'n\sqrt{-1}-x}{2K}\pi}{\sin\frac{2K'n\sqrt{-1}}{2K}\pi}.$$

Quand $n=0$, il faut remplacer ce produit par $\sin\frac{\pi x}{K}$, et le produit cherché peut s'écrire

$$\sin\frac{\pi x}{K}\prod\frac{\left(q^{-n}e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2K}}-q^{n}e^{\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2K}}\right)}{(q^{-n}-q^{n})},$$

en posant, pour abréger, $q=e^{-\pi\frac{K'}{K}}$. On peut encore écrire ce produit ainsi :

$$\sin\frac{\pi x}{K}\prod\frac{\left(e^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2K}}-q^{2n}e^{\frac{\pi x\sqrt{-1}}{2K}}\right)}{(1-q^{2n})},$$

ou, en groupant les termes correspondant à des valeurs de n égales, mais de signes contraires,

$$(1)\qquad \sin\frac{\pi x}{K}-\prod\frac{1-2q^{2n}\cos\frac{\pi x}{K}+q^{4n}}{(1-q^{2n})^2}.$$

En traitant le second produit ou le dénominateur de $\operatorname{sn}x$ comme on a traité le premier, on le trouve successivement égal à

$$\prod\frac{\sin\frac{(2n+1)K'\sqrt{-1}-x}{2K}\pi}{\sin\frac{(2n+1)K'\sqrt{-1}}{2K}\pi}$$

ou

$$\prod\frac{1-2q^{2n+1}\cos\frac{\pi x}{K}+q^{2(2n+1)}}{(1-q^{2n+1})^2}.$$

Les deux résultats auxquels nous venons de parvenir sont d'ailleurs convergents si, ce que l'on peut toujours supposer, le module de q est moindre que l'unité, c'est-à-dire si la partie réelle de $\frac{K'}{K}$ est positive.

La méthode même que nous avons suivie pour former le numérateur et le dénominateur de $\operatorname{sn} x$ montre que ces termes ont des valeurs qui dépendent de l'ordre de leurs facteurs; et, en effet, si nous considérons, par exemple, le dénominateur qui, à un facteur constant près, est

$$\varphi(x) = \prod\left[1 - 2q^{2n+1}\cos\frac{\pi x}{K} + q^{2(2n+1)}\right],$$

il a manifestement la période $4K$ que possédait $\operatorname{sn} x$, mais il n'a pas la période $2iK'$ qu'il aurait eue en laissant d'abord m constant pour faire varier n; et il n'a certainement pas la période $2iK'$, sans quoi il serait doublement périodique sans devenir infini. Quoi qu'il en soit, il est curieux de rechercher ce que devient la fonction $\varphi(x)$ quand on change x en $x + 2K'\sqrt{-1}$; on a

$$\begin{aligned}
&\varphi(x + 2K'\sqrt{-1})\\
&= \prod\left[1 - 2q^{2n+1}\cos\pi\frac{x + 2K'\sqrt{-1}}{K} + q^{2(2n+1)}\right]\\
&= \prod\left(1 - q^{2n+1}e^{-\pi\frac{x+2K'\sqrt{-1}}{K}\sqrt{-1}}\right)\left(1 - q^{2n+1}e^{\pi\frac{x+2K'\sqrt{-1}}{K}\sqrt{-1}}\right),\\
&= \prod\left(1 - q^{2n+3}e^{-\frac{\pi x}{K}\sqrt{-1}}\right)\left(1 - q^{2n-1}e^{+\frac{\pi x}{K}\sqrt{-1}}\right),
\end{aligned}$$

ou, si l'on veut,

$$\varphi(x + 2K'\sqrt{-1}) = \left(1 - q^{-1}e^{\frac{\pi x\sqrt{-1}}{K}}\right)\varphi(x) : \left(1 - qe^{-\frac{\pi x\sqrt{-1}}{K}}\right),$$

c'est-à-dire

$$(A)\qquad \varphi(x+2K'\sqrt{-1}) = -\varphi(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})}.$$

Le numérateur de la valeur de $\operatorname{sn} x$, que nous représenterons par $\theta(x)$, satisfait, comme on peut le vérifier, à la même équation; dès lors il est facile de voir que la fonction définie par le rapport $\frac{\theta(x)}{\varphi(x)}$ admet non-seulement la période $4K$ commune à θ et à φ, mais aussi la période $2K'\sqrt{-1}$. En effet, de la formule (A) et de

$$\theta(x+2K'\sqrt{-1}) = -\theta(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})},$$

on déduit

$$\frac{\theta(x+2K'\sqrt{-1})}{\varphi(x+2K'\sqrt{-1})} = \frac{\theta(x)}{\varphi(x)}.$$

Il resterait à prouver en toute rigueur que $\operatorname{sn} x = \frac{\theta(x)}{\varphi(x)}$; c'est ce qui serait évident, si l'on pouvait admettre que $\frac{\theta(x)}{\varphi(x)}$ représente une fonction continue, monodrome et monogène. En effet, $\operatorname{sn} x$ et $\frac{\theta(x)}{\varphi(x)}$ ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis seraient égaux à un facteur constant près, qu'il serait facile après cela de calculer. Nous ne tarderons pas à prouver que l'on a bien à un facteur constant près $\operatorname{sn} x = \frac{\theta(x)}{\varphi(x)}$; jusqu'alors nous considérerons ce fait comme très-probable.

Les fonctions telles que θ et φ sont ce que nous appellerons des fonctions elliptiques auxiliaires.

(*A suivre.*)

MÉMOIRE SUR LES TRANSFORMATIONS DU SECOND ORDRE DANS LES FIGURES PLANES;

PAR M. E. AMIGUES,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nice.

[SUITE (*).]

Dans le plan P, qui contient le point x, y, z, prenons pour côtés d'un triangle de référence les droites représentées par les équations

$$lx + my + nz = 0,$$
$$l_1x + m_1y + n_1z = 0,$$
$$l_2x + m_2y + n_2z = 0;$$

et ici encore adoptons des paramètres de reférence égaux à l'unité.

Les formules de transformation s'écrivent alors comme il suit :

$$\frac{\nu Z}{X'Y'} = \frac{\lambda X}{Y'Z'} = \frac{\mu Y}{Z'X'}$$

ou bien encore

$$(1) \qquad \lambda XX' = \mu YY' = \nu ZZ'.$$

Si on laisse les deux triangles de référence arbitraires ainsi que les quantités λ, μ, ν, les relations (1) sont les relations algébriques les plus générales pour lesquelles à un point de chaque figure correspond un point et un seul de l'autre figure, sans que néanmoins il y ait homographie. Les transformations de figure définies par ces relations s'appellent *transformations du second ordre.*

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVI, p. 422.

3. A la droite AB ($Z = 0$) correspond le point C'

$$(X' = 0, Y' = 0).$$

A une courbe de degré m ayant pour équation

$$F(X, Y, Z) = 0$$

correspond une courbe de degré $2m$ ayant pour équation

$$F\left(\frac{1}{\lambda X'}, \frac{1}{\mu Y'}, \frac{1}{\nu Z'}\right) = 0.$$

La droite AB coupe la courbe d'ordre m en m points dont chacun a pour correspondant le point C'. Les points A', B', C' sont donc des points multiples d'ordre m de la courbe d'ordre $2m$.

Si la première courbe passe par le point A

$$(Y = 0, Z = 0),$$

la droite B'C' ($X' = 0$) fait partie de la deuxième courbe, dont le degré s'abaisse ainsi d'une unité, en même temps que l'ordre des points B' et C'. Si la première courbe passe par les points A, B, C, f, g, h fois, la deuxième courbe est de degré

$$2m - f - g - h,$$

l'ordre du point A' est

$$m - g - h,$$

celui du point B'

$$m - f - b,$$

celui du point C'

$$m - f - g.$$

En particulier, si une courbe d'ordre $2m$ passe m fois par chacun des points A, B, C, la courbe correspondante est de degré m et ne passe pas par les points A', B', C'.

A la droite BC correspond le point A'; à une droite

menée par A, une droite menée par A′; à une droite quelconque une conique circonscrite au triangle A′B′C′. A une conique correspond une courbe de quatrième ordre à trois points doubles; à une conique passant par A correspond uue courbe de troisième ordre ayant A′ pour point double et B′, C′ pour points simples; à une conique passant par les sommets B et C correspond une conique passant par les sommets B′ et C′. A deux courbes ayant un contact d'ordre K correspondent deux courbes ayant un contact de même ordre.

4. A tout point multiple correspond un point multiple de même ordre; il n'y a d'exception que pour les sommets des triangle de référence qui sont des points multiples appartenant en propre à chaque courbe. Ce principe évident permet de calculer la classe de la transformée.

Soit une courbe d'ordre m passant f, g, h fois par les points A, B, C. La transformée est d'ordre

$$2m - f - g - h$$

et elle a trois points multiples A′, B′, C′, dont l'ordre est

$$m - g - h,$$
$$m - f - h,$$
$$m - f - g;$$

soient d'ailleurs n la classe de la première courbe; x la classe de la deuxième.

A part les points multiples placés aux sommets des deux triangles de référence, on sait qu'à un point multiple d'ordre K correspond un point multiple de même ordre. Ces points multiples communs donnent lieu dans les deux courbes à un même abaissement de classe que nous désignerons par w.

Soient d'autre part y et z les abaissements de classe produits dans la première et dans la seconde courbe par les points mnltiples qu'elles possèdent en propre. On a les équations suivantes :

$$(2)\begin{cases} m(m-1)-n=w+z, \\ (2m-f-g-h)(2m-f-g-h-1)-x=w+z; \end{cases}$$

$$(3)\begin{cases} y=f(f-1)+g(g-1)+h(h-1), \\ z=(n-f-g)(n-f-g-1)+(n-g-h)(n-g-h-1) \\ \qquad +(n-f-h)(n-f-h-1). \end{cases}$$

Eliminant w, y, z, on obtient

$$x=2m+n-2(f+g+h).$$

Pour $f=g=h=0$,

$$x=2m+n,$$

5. L'un des avantages de la transformation consiste à prendre une propriété d'une courbe d'ordre m et à voir ce qu'elle devient dans la transformée, qui est une courbe d'ordre $2m$ possédant trois points d'ordre m. Mais, pour que cette opération soit légitime, il ne faut pas employer des procédés de transformation trop particuliers, tels que celui des rayons vecteurs réciproques. On doit se borner à ceux pour lesquels *toute courbe* d'ordre $2m$ ayant trois points multiples d'ordre m est la transformée d'une courbe d'ordre m.

On voit d'après cela combien il importe de reconnaître les procédés qui ont ce privilége; or il n'est rien de plus facile. On a, en effet, la règle suivante : Pour qu'une courbe quelconque d'ordre $2m$ possédant trois points multiples d'ordre m puisse être regardée comme la transformée d'une courbe d'ordre m, il faut et il suffit que le procédé de transformation laisse arbitraire le triangle de référence dans la figure qui contient la courbe d'ordre $2m$.

La condition est évidemment nécessaire, et l'on voit en passant que le procédé des rayons vecteurs réciproques n'y satisfait point, puisque les trois sommets du triangle de référence sont le pôle et les points circulaires à l'infini.

La condition est d'ailleurs suffisante. En effet, soit une courbe d'ordre $2m$ avec trois points multiples d'ordre m. Prenons ces points pour sommets du triangle de référence dans la figure qui contient la courbe d'ordre $2m$. Pour déterminer cette courbe, il faut

$$\frac{2m(2m+3)}{2}$$

points. Mais les trois points d'ordre m valent

$$\frac{3m(m+1)}{2}$$

points simples. La courbe est donc déterminée, si l'on donne, outre les trois points d'ordre m, un nombre de points égal à

$$\frac{2m(2m+3)}{2}-\frac{3m(m+1)}{2}=\frac{m(m+3)}{2}.$$

A ces points, que l'on peut se donner pour déterminer la courbe, correspondent dans l'autre figure un nombre égal de points, qui définissent précisément une courbe d'ordre m.

6. Si l'on considère toutes les courbes du quatrième ordre ayant pour points doubles les trois sommets d'un triangle, on peut imposer à ces courbes cinq conditions nouvelles. Si on leur en impose quatre, on a un système. Nous appellerons *caractéristiques* de l'un de ces systèmes les nombres μ' et ν' qui indiquent combien de

courbes du système passent par un point donné et combien touchent une droite donnée.

Dans l'autre figure, on a un système de coniques assujetties non aux mêmes conditions, mais aux quatre *conditions correspondantes*. On sait que l'on appelle *caractéristiques* de ce système de coniques les nombres μ et ν qui expriment combien de coniques du système passent par un point donné et combien touchent une droite donnée. On sait aussi que les nombres μ et ν peuvent être obtenus par une méthode générale bien connue aujourd'hui.

Nous allons faire voir que les nombres μ' et ν' se calculent sans difficulté en fonction des nombres μ et ν.

μ', nombre de courbes passant par un point, est égal au nombre de coniques passant par le point correspondant, c'est-à-dire à μ. On a donc

(4) $$\mu' = \mu.$$

ν', nombre de courbes tangentes à une droite, est égal au nombre des coniques tangentes à la conique qui sert de transformée à cette droite, c'est-à-dire au nombre des coniques d'un système (μ, ν) tangentes à une conique donnée. Ce nombre est égal à $2(\mu + \nu$ (*). On a donc

$$\nu' = 2(\mu + \nu),$$

ce qui prouve que le nombre ν' est nécessairement pair.

Reste à montrer comment les propriétés d'un système (μ', ν') s'expriment en fonction de ses caractéristiques.

(*) Le nombre des coniques d'un système (μ, ν), tangentes à une courbe d'ordre m et de classe n, est égal à $n\mu + m\nu$ (CHASLES, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1er août 1864).

On sait que plusieurs propriétés des coniques du système (μ, ν) se présentent sous la forme suivante :

Le lieu d'un point ω dans un système de coniques (μ, ν) est d'ordre $\alpha\mu + \beta\nu$.

Transformons cet énoncé. Le lieu d'un point ω' dans un système (μ', ν') de courbes du quatrième ordre à trois points doubles communs est une courbe d'ordre

$$2\left[\alpha\mu' + \frac{\beta}{2}(\nu' - 2\mu')\right],$$

ayant trois points multiples d'ordre moitié moindre, confondus avec les trois points doubles.

Donnons un exemple :

Si d'un point S on mène deux tangentes à chaque conique du système (μ, ν) et que par le point où l'une d'elles rencontre une droite Δ on mène une nouvelle tangente, celle-ci rencontre l'autre tangente issue de S sur une courbe de l'ordre $(\mu + 2\nu)$ qui a un point multiple d'ordre $(\mu + \nu)$ en S. (Chasles, *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. LXXII.)

Voici le théorème transformé. On a un système de courbes du quatrième ordre (μ', ν') à trois points doubles communs. D'un point S on mène les deux coniques, passant par les trois points doubles, et tangentes à l'une des courbes du système. Par le quatrième point où l'une d'elles rencontre une conique fixe passant par les points doubles on mène une nouvelle conique passant par les points doubles et tangente à la courbe. Celle-ci coupe la seconde conique menée par S sur une courbe d'ordre $2(\nu' - \mu')$ ayant en S un point multiple d'ordre $\frac{\nu'}{2}$ et ayant aux trois points doubles des points d'ordre $\nu' - \mu'$.

Dès que nous avons eu l'idée de la méthode qui précède, nous l'avons mise à l'épreuve en essayant de trans-

former les nombreux théorèmes de M. Chasles sur les systèmes de coniques. Or, le plus souvent, nous avons été arrêté par la difficulté de définir le point ω' au moyen des seuls éléments de sa figure et indépendamment de la figure transformée qui contient le point ω. Réfléchissant à cette circonstance, nous sommes arrivé à cette conviction, que les transformations du second ordre seraient condamnées à une stérilité relative, tant qu'on n'aurait pas résolu la question suivante : « Une conique étant soumise à une transformation du second ordre, trouver dans la courbe transformée les éléments qui correspondent aux principaux éléments de la conique, tels que les foyers, le centre, les axes, les sommets, les diamètres, etc. » Ce problème, croyons-nous, n'a été ni traité, ni même posé. En tout cas, la considération des points circulaires à l'infini nous en a donné une solution fort simple que nous allons indiquer.

7. La droite de l'infini de chaque figure correspond dans l'autre figure à une conique circonscrite au triangle de référence. Si ces deux coniques sont des cercles, les points circulaires à l'infini de chaque figure correspondent aux points circulaires à l'infini de l'autre figure. Réciproquement, si les points circulaires se correspondent, le cercle circonscrit à chaque triangle de référence donne dans l'autre figure une droite passant par les points circulaires à l'infini, c'est-à-dire la droite de l'infini. Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que les points circulaires à l'infini se correspondent, c'est que la droite de l'infini de chaque figure donne dans l'autre figure le cercle circonscrit au triangle de référence.

Cherchons les caractères analytiques et géométriques de ces systèmes remarquables. La droite de l'infini par

rapport au triangle de référence ABC a pour équation

$$X \sin A + Y \sin B + Z \sin C = 0.$$

Elle se transforme en une conique dont l'équation est

$$\frac{\sin A}{\lambda X'} + \frac{\sin B}{\mu Y'} + \frac{\sin C}{\nu Z'} = 0.$$

Cette conique doit coïncider avec le cercle circonscrit au triangle de référence A′B′C′ dont l'équation est

$$\frac{\sin A'}{X'} + \frac{\sin B'}{Y'} + \frac{\sin C'}{Z'} = 0.$$

Cela nous donne les conditions

(6) et (7) $$\frac{\sin A}{\lambda \sin A'} = \frac{\sin B}{\mu \sin B'} = \frac{\sin C}{\nu \sin C'}.$$

On aura de même, pour exprimer que la droite de l'infini de la figure A′B′C′ se transforme en un cercle circonscrit au triangle ABC,

(8) et (9) $$\frac{\sin A'}{\lambda \sin A} = \frac{\sin B'}{\mu \sin B} = \frac{\sin C'}{\nu \sin C}.$$

L'élimination des angles donne

$$\lambda^2 = \mu^2 = \nu^2,$$

et, comme tous les sinus sont positifs

$$\lambda = \mu = \nu;$$

on a en outre

$$A' = A, \quad B' = B, \quad C' = C.$$

Ainsi les caractères des systèmes où les points circulaires à l'infini se conservent sont les suivants : 1° les triangles de référence sont semblables ; 2° les constantes λ, μ, ν sont égales à l'unité. Comme les points circulaires à l'infini sont souvent appelés les *ombilics du*

plan, nous désignerons les systèmes précédents sous le nom de systèmes *ombilico-anallagmatiques.*

8. Les systèmes ombilico-anallagmatiques ont des propriétés remarquables.

Observons d'abord qu'en vertu des relations

$$XX' = YY' = ZZ',$$

la droite

$$Y = mX$$

se transforme en la droite

$$X' = mY',$$

c'est-à-dire que, si l'on faisait coïncider les angles égaux C et C′, les droites correspondantes, passant par leurs sommets, seraient symétriquement placées par rapport à la bissectrice interne. Il résulte de là que l'angle de deux droites quelconques passant par un sommet quelconque C du triangle ABC est égal à l'angle des droites correspondantes qui passent par le sommet C′ du triangle A′B′C′. En d'autres termes, les angles se conservent autour des trois sommets du triangle de référence.

Observons en second lieu qu'un cercle de la figure ABC ne se transformera en conique qu'autant qu'il passera par deux sommets du triangle ABC, par exemple par les points B et C. Mais, si cette condition est remplie, cette conique ne pourra être qu'un autre cercle passant par les points B′ et C′. Les centres de tous les cercles passant par les points B et C, et les centres de tous les cercles correspondants passant par les points B′ et C′, forment évidemment deux divisions homographiques, le point à l'infini de chaque division ayant pour correspondant dans l'autre le centre du cercle circonscrit au triangle de référence. Si, en particulier, les deux triangles de référence sont égaux et confondus, les

centres des cercles correspondants sont les couples de points d'une involution dont le centre est le centre du cercle circonscrit : ce dernier cas a été proposé comme exercice aux lecteurs des *Nouvelles Annales de Mathématiques,* par M. Haton de la Goupillière.

Les points à l'infini de toute courbe prise dans la figure A'B'C' correspondent aux points où la courbe correspondante coupe le cercle circonscrit au triangle ABC. Une droite de la figure ABC se transforme donc en hyperbole, en parabole ou en ellipse, suivant qu'elle coupe le cercle circonscrit au triangle ABC, qu'elle lui est tangente ou qu'elle ne le coupe pas. En général, soient R et S deux points où une courbe quelconque de la figure ABC coupe le cercle circonscrit au triangle ABC. Les points correspondants sont sur la droite de l'infini et sur les directions B'R' et B'S' qui correspondent respectivement à BR et BS. D'après le principe de la conservation des angles autour des sommets des triangles de référence, l'angle R'B'S' est égal à l'angle RBS et l'angle des directions asymptotiques B'R', B'S' a pour mesure la moitié de l'arc RS.

Signalons encore ce fait. Les angles étant conservés autour de A et de A', une division en involution sur une droite menée par B donnera une division en involution sur la droite correspondante menée par B'. Soit dès lors le théorème de Desargues. Les extrémités des cordes obtenues en coupant par une droite toutes les coniques qui passent par quatre points sont les points conjugués d'une même involution (*). De cet énoncé on déduit le théorème suivant. Si l'on a un système de courbes du quatrième ordre avec trois points doubles communs et

(*) On sait que le célèbre géomètre lyonnais n'a point énoncé ce théorème sous une forme aussi générale.

quatre points simples communs, toute sécante menée par un des points doubles donne des cordes dont les extrémités sont les points conjugués d'une même involution.

9. Soit une courbe quelconque d'ordre $2m$ avec trois points d'ordre m formant les sommets d'un triangle ABC. Prenons un triangle semblable A′B′C′ dans un même plan ou dans un plan différent, et considérons la transformation de figure ombilico-anallagmatique définie par les relations

$$XX' = YY' = ZZ'.$$

La courbe d'ordre $2m$ a pour transformée une courbe d'ordre m. Un foyer de la courbe d'ordre m est le point de rencontre de deux tangentes menées à cette courbe des points I′ et J′, ombilics du plan A′B′C′. A ce foyer correspond, dans la courbe d'ordre $2m$, le quatrième point de rencontre de deux coniques circonscrites au triangle ABC, tangentes à la courbe d'ordre $2m$ et passant respectivement par les points I et J, ombilics du plan ABC. Nous dirons que ce point est un *foyer secondaire* de la courbe d'ordre $2m$.

La transformation donne aussitôt le théorème suivant : *Une courbe d'ordre $2m$ et de classe ν ayant trois points d'ordre m admet $(\nu - 2m)^2$ foyers secondaires, parmi lesquels $(\nu - 2m)$ sont réels.*

Dans les courbes du quatrième ordre à trois points doubles il y a quatre foyers secondaires, dont deux réels et deux imaginaires. Les droites qui joignent un des points doubles aux deux foyers réels sont également inclinées sur les deux tangentes menées de ce point double à la courbe. Ce théorème résulte de la propriété analogue des foyers réels des coniques, en même temps que

du principe de la conservation des angles autour des points A et A'.

On voit que tout théorème sur les foyers ordinaires d'une courbe d'ordre m donne un théorème sur les foyers secondaires de courbes d'ordre $2m$ ayant trois points d'ordre m. Donnons un exemple.

Si de deux points P et P' on mène les tangentes à chaque conique d'un système (μ, ν), le lieu de leur intersection est une courbe d'ordre 3ν avec deux points d'ordre ν en P et P'. Ce théorème, presque évident, s'énonce comme il suit, lorsque les points P et P' sont les ombilics I' et J' : *Le lieu des foyers des coniques d'un système* (μ, ν) *est une courbe d'ordre* 3ν *passant* ν *fois par les ombilics du plan*. En transformant ce théorème on obtient le suivant : *Dans un système de courbes du quatrième ordre à trois points doubles communs* (μ', ν'), *le lieu des foyers secondaires est une courbe d'ordre* $3(\nu' - 2\mu')$ *passant* $\frac{\nu' - 2\mu'}{2}$ *fois par les ombilics du plan et* $\frac{3}{2}(\nu' - 2\mu')$ *fois par chacun des points doubles.*

10. Imaginons une courbe quelconque du quatrième ordre ayant trois points doubles A, B, C. Prenons un triangle A'B'C' semblable au triangle ABC, et faisons la transformation ombilico-anallagmatique définie par les relations

$$XX' = YY' = ZZ'.$$

La courbe se transforme en une conique S.

A l'axe de la conique S qui passe par les foyers réels correspond une conique réelle passant par les trois points doubles et par les foyers secondaires réels. Cette conique s'appellera un *axe secondaire* de la courbe du quatrième ordre. De même à l'axe de la conique S qui

passe par les foyers imaginaires, correspond dans la courbe du quatrième ordre une conique réelle passant par les points doubles et par les foyers secondaires imaginaires. Cette conique s'appellera aussi un *axe secondaire* de la courbe du quatrième ordre.

Les deux axes de la conique S se coupent au centre. Le centre a donc pour point correspondant le quatrième point d'intersection de ces deux coniques menées par les points doubles, que nous avons appelées *axes secondaires*. Ce nouveau point sera appelé un *centre secondaire* de la courbe du quatrième ordre.

Les sommets de la conique S correspondent aux quatre points autres que les points doubles où la courbe du quatrième ordre est coupée par ses axes secondaires. Ces points seront les *sommets secondaires* de la courbe du quatrième ordre.

Les diamètres de la conique S se transforment en coniques passant par les trois points doubles et par le centre secondaire. On appellera ces coniques des *diamètres secondaires*.

La correspondance étant ainsi établie entre les éléments des deux figures, la transformation des théorèmes se fera sans difficulté.

Donnons un exemple : *Dans un système de coniques* (μ, ν) *le lieu des centres est d'ordre* ν. En transformant ce théorème, on obtient le suivant : *Dans un système de courbes du quatrième ordre à trois points doubles communs* (μ', ν'), *le lieu des centres secondaires est une courbe d'ordre* $\nu' - 2\mu'$ *ayant les points doubles pour points d'ordre* $\frac{1}{2}(\nu' - 2\mu')$.

11. Imaginons deux triangles, dont les sommets A et A′ sont confondus, ainsi que les sommets B et B′, tandis

que les sommets C et C' sont symétriques par rapport à la droite qui joint les deux autres. Nous compterons des angles autour des points A et B de $-\infty$ à $+\infty$. AB sera l'origine des premiers, BA celle des seconds. Le sens positif sera, pour les premiers, de AB vers AC, pour les seconds de BA vers BC. Soient α et β les angles géométriques CAB et CBA.

Pour passer d'un point M' de la figure A'B'C' au point correspondant M de la figure ABC, on fera tourner AM' de α autour de A et BM' de β autour de B. Pour le passage inverse, on fera tourner naturellement de $-\alpha$ et de $-\beta$. On a ainsi un système de transformation algébrique et du second ordre.

A tout point de A'B' correspond C, à tout point de B'C' correspond A, à tout point de A'C' correspond B, et inversement. Donc les triangles de référence sont ABC pour la figure M, et A'B'C' pour la figure M'.

Les triangles étant égaux, on aura un système ombilico-anallagmatique si à la droite de l'infini de la figure A'B'C' correspond le cercle circonscrit au triangle ABC, et inversement.

Or, soient A'R' et B'S' deux droites parallèles de la figure A'B'C', se coupant en H' sur la droite de l'infini. Pour avoir le point H qui correspond à H', on fait tourner A'R' et B'S' de α et de β. Soient AR et BS les nouvelles positions de ces droites, et H le point d'intersection de AR et de BS. Il est visible que l'angle AHB est égal à $(\alpha+\beta)$. Il est donc le supplément de l'angle C, et le point H est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Le système ombilico-anallagmatique que nous venons de définir offre quelque intérêt.

1° Il donne la description des coniques de Newton, permet de distinguer le genre de la conique suivant la

position de la droite correspondante et donne une construction simple des asymptotes.

2° Il se prête facilement au calcul dans le système des coordonnées biangulaires, étudiées par M. William Walton (*).

Soit M′ un point du plan A′B′C′. Les coordonnées de ce point sont les angles B′A′M′ $= \varphi$ et A′B′M′ $= \psi$. Ces angles sont comptés de $-\infty$ à $+\infty$, comme il a été dit plus haut.

La courbe la plus générale d'ordre *m* est représentée par l'équation algébrique la plus générale de degré *m* entre $\cot\varphi$ et $\cot\psi$.

Partant de ce principe évident, on fera aisément la théorie de la droite, des directions asymptotiques, des centres, etc.

Pour nous borner à l'objet de notre étude, nous ferons remarquer que, si l'équation d'une courbe algébrique dans la figure A′B′C′ est

$$f(\cot\varphi,\ \cot\psi) = 0,$$

l'équation de la courbe transformée est simplement

$$f[\cot(\varphi + \alpha),\ \cot(\psi + \beta)] = 0.$$

(*A suivre.*)

(*) *The quarterly Journal of pure and applied Mathematics.*

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]

Des surfaces du second degré qui touchent les mêmes plans.

143. Désignons par I_E, I'_E les indices d'un plan E par rapport aux deux surfaces S et S'; si l'on a entre ces indices la relation

$$I_E - \varphi I'_E = 0,$$

dans laquelle φ est un *paramètre* donné, le plan E enveloppera une surface Φ qui touchera tous les plans tangents communs aux surfaces S et S'.

En supposant les surfaces S et S' rapportées à leur tétraèdre autopolaire ou conjugué commun *abcd*, la forme de la relation précédente montre que ce tétraèdre est également conjugué à toute surface Φ qui touche les plans tangents communs aux deux premières, ou qui est inscrite à la développable (SS').

Des relations établies (85, 30°) on déduit les suivantes :

$$I_{EE'} = \sum \frac{(a, E)(a, E')}{(a, A)^2} I_A \qquad (4 \text{ termes}),$$

$$-I_{\varepsilon\varepsilon'} = \pi^2 \sum \frac{|\varepsilon, \nu|\,|\varepsilon', \nu|}{|\gamma, \nu|^2} \frac{I_C I_D}{\sin^2 CD} \qquad (6 \text{ termes}),$$

$$-\pi^2 I_{ee'} = \sum \frac{(e, A)(e', A)}{I_A} \qquad (4 \text{ termes}).$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481, 529, et t. XVI, p. 5, 160, 193, 249, 289.

Elles donnent l'indice du système de deux plans, de deux droites et de deux points à l'aide de formules qui ne contiennent que les indices des faces A, B, C, D du tétraèdre autopolaire commun aux surfaces S et S'.

144. Il suit de là que, si nous prenons dans l'espace deux plans E, E', deux droites ε, ε', deux points e, e', les paramètres des surfaces inscrites à la développable (SS'), et qui sont respectivement conjuguées aux plans, aux droites et aux points sont déterminés par les relations

$$(1) \qquad 0 = \sum \frac{(a, \mathrm{E})(a, \mathrm{E}')}{(a, \mathrm{A})^2}(\mathrm{I_A} - \varphi \mathrm{I'_A}),$$

$$(2) \qquad 0 = \sum \frac{|\varepsilon, \nu|\,|\varepsilon', \nu|}{|\gamma, \nu|^2} \frac{(\mathrm{I_C} - \varphi \mathrm{I'_C})(\mathrm{I_D} - \varphi \mathrm{I'_D})}{\overline{\sin}^2\,\mathrm{CD}};$$

$$(3) \qquad 0 = \sum \frac{(e, \mathrm{A})(e', \mathrm{A})}{\mathrm{I_A} - \varphi \mathrm{I'_A}}.$$

Si l'on développe ces équations en tenant compte des relations établies (85), on trouvera

$$(1)' \qquad 0 = \mathrm{I_{EE'}} - \varphi \mathrm{I'_{EE'}},$$

$$(2)' \qquad 0 = \frac{\mathrm{I}_{\varepsilon\varepsilon'}}{\pi^2} + \varphi \sum \frac{|\varepsilon, \nu|\,|\varepsilon', \nu|}{|\gamma, \nu|^2} \frac{\mathrm{I_C I'_D} + \mathrm{I_D I'_C}}{\overline{\sin}^2\,\mathrm{CD}} + \varphi^2 \frac{\mathrm{I'}_{\varepsilon\varepsilon'}}{\pi'^2},$$

$$(3)' \qquad 0 = \frac{\mathrm{I}_{ee'}}{\pi^4} - \varphi \frac{\mathrm{M}'}{\pi^4} + \varphi^2 \frac{\mathrm{M}}{\pi'^4} - \varphi^3 \frac{\mathrm{I'}_{\varepsilon\varepsilon'}}{\pi'^4},$$

en posant

$$\mathrm{M} = \mathrm{I'}_{ee'} \sum \frac{\mathrm{I_A}}{\mathrm{I'_A}} + \frac{1}{\pi'^2} \sum \frac{(e, \mathrm{A})(e', \mathrm{A})\,\mathrm{I_A}}{\mathrm{I'^2_A}},$$

$$\mathrm{M}' = \mathrm{I}_{ee'} \sum \frac{\mathrm{I'_A}}{\mathrm{I_A}} + \frac{1}{\pi^2} \sum \frac{(e, \mathrm{A})(e', \mathrm{A})\,\mathrm{I'_A}}{\mathrm{I^2_A}}.$$

π et π' sont les produits des demi-axes des surfaces S et S'.

Ces relations montrent que, à la développable (SS′), on peut inscrire une surface conjuguée au système de deux plans, deux surfaces conjuguées au système de deux droites et trois surfaces conjuguées au système de deux points.

Lorsque le plan E′ coïncide avec le plan E, la droite ε' avec ε, le point e' avec e, les équations (1), (2), (3) ou leurs transformées seront respectivement l'équation par plans, l'équation par droites et l'équation par points de la surface Φ inscrite à la développable (SS′).

(*A suivre.*)

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES DE 1875.

Mathématiques spéciales.

1. Distance d'un point à un plan, à une droite. Plus courte distance de deux droites.
2. Théorème de Rolle.
3. Pôles et polaires.
4. Méthode d'approximation de Newton.
5. Déterminer en grandeur et en position les axes d'une conique à centre dont on donne l'équation. Cas de la parabole. Détermination du paramètre.
6. Transformation des équations.
7. Formule de Moivre. Division des arcs.
8. Plans diamétraux dans les surfaces du second ordre.
9. Application des dérivées à l'étude des fonctions.
10. Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent.

11. Mener d'un point une normale à une conique. Discuter le problème.

12. Intersection de deux courbes du second degré.

13. Sections circulaires des surfaces du second ordre.

14. Figures homothétiques (Géométrie de l'espace).

Mathématiques élémentaires.

1. Aire de la sphère. Théorèmes qui y conduisent.

2. Plus grand commun diviseur. Plus petit commun multiple.

3. Pénétration des polyèdres.

4. Première leçon sur la mesure des volumes.

5. Symétrie.

6. Première leçon de Géométrie descriptive.

7. Réduction des fractions ordinaires en fractions décimales.

8. Principes qui servent à la résolution des équations du premier degré à une et à plusieurs inconnues.

9. Construction des Tables trigonométriques.

10. Formules qui servent à la résolution des triangles.

11. Figures semblables (Géométrie plane).

12. Division des nombres entiers et fractionnaires.

13. Équations du second degré.

14. Levier. Balances.

Composition en Mathématiques spéciales.

A un ellipsoïde donné on circonscrit une série de surfaces du second ordre Σ, la courbe de contact étant l'intersection de l'ellipsoïde par un plan fixe P. On circonscrit ensuite à chaque surface Σ un cône ayant pour sommet un point donné A :

1° Trouver le lieu des courbes de contact des cônes et des surfaces Σ ;

2° Classer les surfaces qui forment le lieu, quand on suppose le plan P fixe et le point A mobile dans l'espace.

On déterminera, pour chacune des variétés du lieu, les surfaces qui limitent les régions de l'espace où se trouve alors le point A.

Composition en Mathématiques élémentaires.

Résoudre un triangle connaissant un côté a, l'angle opposé A et la somme m^2 des carrés de la hauteur h, qui correspond au côté a, et de la différence des deux autres côtés $[h^2 + (b - c)^2 = m^2]$.

Mécanique élémentaire.

Déterminer les positions d'équilibre de deux poids égaux P mobiles sans frottement sur une circonférence fixe, située dans un plan vertical, et sur une tige rectiligne pouvant librement tourner autour d'un point A, pris sur le diamètre horizontal de la circonférence.

On négligera les dimensions des poids du mobile.

Composition sur un sujet d'histoire et de méthode.

Théorie élémentaire des déterminants. Principales applications.

Composition sur un sujet de licence.

On donne, dans un plan horizontal, deux masses m, m', reliées par un fil de longueur constante mom' qui peut glisser librement dans un anneau fixe en o. On communique aux masses m, m' deux vitesses initiales

quelconques dans le plan mom' et l'on demande d'étudier le mouvement du système :

1° Établir les formules qui définissent les trajectoires décrites par les points m, m' ;

2° Indiquer les divers cas dans lesquels les intégrations peuvent se terminer au moyen des fonctions élémentaires ;

3° Calculer la tension du fil ;

4° Former l'équation qui donne les valeurs maxima et minima des distances om, om' des mobiles au point fixe ;

5° Discuter complétement le problème dans le cas où l'une seulement des masses, m par exemple, reçoit une impulsion initiale, l'autre masse partant de l'état de repos.

Nota. — On fait abstraction des frottements, ainsi que de la masse du fil ; on suppose de plus que le fil est parfaitement flexible, mais qu'il offre une résistance indéfinie, soit à l'extension, soit à la contraction, et qu'il demeure toujours rectiligne de o en m et de o en m'.

CONCOURS D'AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES DE 1876.

Composition en Mathématiques spéciales.

On donne une parabole P et un point H dont la projection orthogonale sur le plan de la parabole se fait au sommet de cette parabole :

1° Trouver l'équation générale des surfaces de révolution du second ordre qui passent par la parabole P et par le point H ;

2° Déterminer le nombre de celles de ces surfaces dont l'axe passe par un point A donné dans le plan Q, qui contient le point H et l'axe de la parabole P.

Classer les mêmes surfaces quand le point A se meut dans le plan Q.

Mécanique élémentaire.

On donne une circonférence O située dans un plan vertical, et, sur la verticale du centre O au-dessus de ce point et en dehors du cercle, on prend un point C que l'on considère comme une poulie infiniment petite.

Sur cette poulie passe un fil ACB; à l'extrémité B est suspendu un poids Q, à l'autre extrémité A est fixé un anneau qui supporte un poids P et qui est assujetti à glisser sans frottement le long de la circonférence O.

Déterminer les positions d'équilibre du système et indiquer pour chacune d'elles si l'équilibre est stable ou instable. (On néglige le poids du fil et celui de l'anneau, ainsi que les dimensions de la poulie et celles de l'anneau.)

Composition sur un sujet d'histoire et de méthode.

Théorie élémentaire des fractions continues.

Mathématiques spéciales.

1. Étude de la fonction exponentielle a^x.

Des logarithmes considérés comme exposants.

2. Théorie élémentaire des séries.

3. Recherche des sécantes communes à deux courbes du second degré.

Discussion de l'équation en λ.

4. Limites des racines d'une équation algébrique.

5. Règle des signes de Descartes.

6. Triangles sphériques supplémentaires.

Construire un triangle sphérique connaissant les trois côtés ou les trois angles.

Aire du triangle sphérique.

7. Tangentes et asymptotes en coordonnées polaires.

8. Théorie des asymptotes (coordonnées rectilignes).

9. Réduction de l'équation du second ordre à trois variables à ses formes les plus simples (coordonnées rectangulaires).

10. Intersection de deux surfaces de révolution dont les axes se rencontrent (Géométrie descriptive).

11. Sections circulaires des surfaces du second ordre.

Une surface du second ordre étant donnée par son équation générale, reconnaître si elle admet des sections circulaires (coordonnées rectangulaires).

12. Théorie des foyers.

13. Théorème de Sturm (application).

14. Concavité. Convexité. Inflexion. Points singuliers dans les courbes algébriques.

15. Lim $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ quand m devient infini. Propriétés principales du nombre e.

16. Génération des surfaces. Exemples tirés des principales familles.

17. Plus courte distance de deux points à la surface d'une sphère. Plus courte distance d'un point de la sphère à la circonférence d'un grand cercle et d'un petit cercle.

Mathématiques élémentaires.

1. Volume du cylindre, du cône et du tronc de cône.

2. Année tropique. Calendrier.

3. Hélice. Propriétés principales (courbes usuelles).

4. Propriété de la tangente à l'ellipse par rapport aux rayons vecteurs du point de contact.

Applications. Mêmes questions pour la parabole (courbes usuelles).

5. Surface de la sphère (théorèmes qui y conduisent).

8. Théorie élémentaire des nombres premiers.

9. Construction des Tables trigonométriques.

10. Distance d'un point à un plan. Distance d'un point à une droite. Plus courte distance de deux droites (Géométrie descriptive).

11. Racine carrée (Arithmétique).

12. Volume du tronc de pyramide. Volume du tronc de prisme triangulaire.

13. Formules générales pour la résolution des triangles. Équivalence des différents systèmes.

14. Mesure des angles.

15. Plus grand commun diviseur. Plus petit multiple commun.

16. Sphère céleste. Mouvement diurne.

17. Éclipses de Lune.

18. Étude des variations de l'expression

$$\frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'x + c'}.$$

19. Formules $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$.

Composition en Géométrie descriptive.

Une sphère opaque, posée sur le plan horizontal, est éclairée par deux points lumineux (a, a') et (b, b'). On demande les projections des ombres propres de la sphère, et les ombres portées sur le plan horizontal.

Données. — La sphère a 10 centimètres de diamètre;

elle est posée sur le plan horizontal en un point o situé à 9 centimètres en avant de la ligne de terre. Le point a est situé à 9 centimètres en avant de la ligne de terre et à 12 centimètres à gauche des points. Le point a' est sur la ligne de rappel menée par le point a et à 10 centimètres au-dessus de la ligne de terre.

La ligne bb' est à 24 millimètres à droite de aa', le point b sur la ligne de terre et le point b' à 5 centimètres au-dessus du point b.

Composition sur les matières de la licence.

Un point matériel M se meut sur un cercle horizontal qui tourne, d'un mouvement uniforme, autour d'un axe vertical passant par un point O de la circonférence :

1° Étudier le mouvement relatif du mobile sur le cercle ;

2° Déduire de là les lois du mouvement absolu du mobile dans le plan fixe ;

3° Examiner en particulier le cas où la vitesse du mobile sur le cercle devient nulle quand le mobile arrive en O. Dans ce dernier cas, calculer et discuter la valeur de la pression exercée par le mobile sur le cercle.

Nota. — On fait abstraction de la pesanteur et du frottement.

Exercice de calcul.

Calculer, à $\frac{1}{10000}$ près, les valeurs de x et de y données par les relations :

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3.2^3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{5.2^5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{1}{7.2^7} + \ldots,$$

$$y = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots.$$

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 580

(voir 1re série, t. XX, p. 139);

PAR M. H. BROCARD.

Résoudre les équations

$$(1)\quad u^6 - 3A^2u^4 + 3A(1-\gamma^2)u^2 - A^6(1-3\gamma^2+2\gamma^3) = 0,$$

$$(2)\quad u^6 - (2A^2 + C^2)u^4 + (2A^2C^2\sigma + A^4\sigma'')u^2 - A^2C^2\varpi = 0,$$

$$\sigma = 1-\gamma^2,\quad \sigma'' = 1-\gamma''^2,\quad \varpi = 1+2\gamma\gamma'\gamma''-\gamma^2-\gamma'^2-\gamma''^2.$$

(LAMÉ.)

La première équation a été résolue dans le même volume (p. 295) par M. Jaufroid, qui a terminé son travail par ces mots : « La deuxième équation a-t-elle été exactement copiée ? », question à laquelle le rédacteur a répondu : « Oui (LAMÉ, p. 51), TM. ».

Cependant il était bien évident que l'équation (2) n'était pas homogène et que l'expression de ϖ ne pouvait renfermer γ'. Dans ces conditions, l'équation (2) n'admettait pas de solution littérale.

Terquem n'a pas donné l'indication de l'ouvrage de Lamé dont il avait extrait l'équation (2). On trouve dans les leçons de Lamé sur la *Théorie analytique de la chaleur* (p. 51) l'équation suivante

$$(3)\quad u^6 - u^4(2A^2+C^2) + u^2[2A^2C^2 + A^4(1-\gamma''^2) - 2A^2C^2\gamma^2] - A^4C^2[1-\gamma''^2 - 2\gamma^2 + 2\gamma^2\gamma''^2] = 0.$$

Pour combler la lacune que cette erreur de copie avait

elle est posée sur le plan horizo... diquer la solution
situé à 9 centimètres en avant d... ifier que le premier
point a est situé à 9 centimèt... pour facteurs les poly-
terre et à 12 centimètres à g...
est sur la ligne de rapp... $- \gamma''$)
10 centimètres au-dess...

La ligne bb' est à ... $- A^2C^2(1 + \gamma'') - 2A^2C^2\gamma^2 = 0$,

point b sur la ligne ... la question.

au-dessus du poi...

Comp... ...*uestion* 1225

...(1[e] série, t. XV, p. 192);

... Louis THUILLIER,
Élève au lycée d'Amiens.

Un poi...
qui to...
axe v...

... *eux coniques dans un plan; le lieu des*
c... *...tion des diamètres de l'une et de l'autre*
...rrespondant à des cordes de même di-
... général une conique: examiner l'espèce
...ique d'après l'espèce et la position relative
...iques S *et* S'.

...quations des deux coniques étant

$$S \qquad f(x) = 0,$$
$$S' \qquad \varphi(x) = 0,$$

...équations des diamètres des cordes de direction m ...ces deux coniques seront

$$f'_x + m f'_y = 0, \quad \varphi'_x + m \varphi'_y = 0.$$

L'élimination de m entre ces deux équations donne pour le lieu cherché

$$f'_x \varphi'_y - f'_x \varphi'_y = 0,$$

c'est-à-dire une conique.

ᵑ directement la nature par la considéra-
l'infini. On sait qu'il existe toujours
.ues un système de diamètres conjugués
ɩɪɴᴠɪɴ, *Géom. plane,* 889).

oposition peut d'ailleurs se démontrer géo-
·ment. On sait qu'un système de diamètres con-
› forme avec les asymptotes un faisceau harmo-
ɪue. Si l'on ramène les coniques à avoir le même
entre, la recherche du système de diamètres conju-
gués communs revient à celle du système de deux droites conjuguées harmonique par rapport à deux autres, ou encore, si l'on coupe les asymptotes des deux coniques par une même droite, à la détermination sur cette droite du segment conjugué harmonique par rapport à deux autres, et l'on sait que le segment n'est imaginaire que quand les deux autres empiètent l'un sur l'autre (*).

A toute direction de cordes parallèle à l'un de ces diamètres conjugués correspondra un point du lieu à l'infini dans la direction conjuguée.

Donc le lieu sera une ellipse quand S et S' seront des hyperboles dont les angles des asymptotes empiètent l'un sur l'autre.

Ce sera une parabole quand S et S' auront une direction asymptotique commune, et cette direction asymptotique sera celle des diamètres de la parabole.

Le lieu se réduit à une droite quand S et S' ont les mêmes directions asymptotiques, c'est-à-dire sont homothétiques; il disparaît quand S et S' sont homothétiques et concentriques.

(*) Quand les deux segments ont une extrémité commune, les deux extrémités du segment conjugué harmonique se confondent avec cette extrémité commune.

Dans tous les autres cas, le lieu sera une hyperbole ayant pour directions asymptotiques celles des diamètres conjugués parallèles.

Note. — La même question a été résolue par MM. A. Boucher, élève du lycée d'Angers; Ch. Brunot, élève du lycée de Dijon; P. Souverain, élève du lycée de Clermont; E. Doublet, maître répétiteur au lycée de Lille; J. Freson, élève de l'École des mines de Liége; Arnold Droz, professeur à l'institut Breidenstein, à Granges (Suisse); B. Launoy; Moret-Blanc et Ferd. Pisani.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

1. Recherches sur plusieurs Ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'Arithmétique supérieure; par M. *Édouard Lucas,* professeur au Lycée Charlemagne. (Extrait du *Bullettino*, 1877.)

2. Nuovo Metodo dei massimi e minimi delle funzioni primitive e integrali; per *Luigi Barbera*, professore di filosofia nella Università di Bologna.

3. Principii elementari sulle probabilità, esposti da *G.-B. Marsano*, professore di matematiche nella Università et nel R. Istituto tecnico di Genova. — Genova, tipografia del R. Istituto Sordo-Muti; 1876.

4. Théorie des nombres complexes et bicomplexes; par *A. Benthem*. (Extrait des *Archives néerlandaises.*)

5. Sur un mémoire de Daviet de Foncenex, et sur les géométries non euclidiennes; par *A. Genocchi*. — Imprimerie royale de Turin; 1877.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

PAR M. H. LAURENT.

[SUITE (*).]

CONSIDÉRATIONS NOUVELLES SUR LES FONCTIONS AUXILIAIRES DE JACOBI.

Nous voilà conduits à étudier les fonctions auxiliaires évidemment plus simples que les fonctions doublement périodiques qu'elles engendrent; mais, sous forme de produit, elles paraissent peu maniables, et nous allons essayer de les développer en série.

En définitive, il est à peu près établi que $\operatorname{sn} x$ (et l'on verrait de même que $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$) peut être considéré comme quotient de deux fonctions admettant l'une ses zéros, l'autre ses infinis. Ces fonctions n'ont qu'une période, mais elles se reproduisent, à un facteur commun près, quand on augmente leur variable d'une quantité convenablement choisie et qui sera une seconde période de leur quotient.

Désignons alors par $\theta(x)$ une fonction possédant la période ω, et développable par la formule de Fourier suivant les puissances de $e^{\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{-1}}$, partageons le plan en parallélogrammes de côtés ω et ϖ, et proposons-nous de faire en sorte que dans chaque parallélogramme la fonction θ possède μ zéros.

Le nombre μ de ces zéros devra être égal à l'intégrale de $\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{\theta'(x)}{\theta(x)}$, prise le long du périmètre d'un

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVI, p. 78, 211, 361, 385, 433.

parallélogramme, et cela quel que soit le point que l'on prendra pour sommet, si l'on veut que les zéros soient régulièrement distribués dans le plan. Or la valeur que prend notre intégrale le long des côtés parallèles à ϖ est nulle, puisque la fonction, admettant la période ω, prend des valeurs égales sur ces côtés, tandis que dx y prend des valeurs égales et de signes contraires. On devra donc avoir, en intégrant seulement le long des deux autres côtés,

$$(1) \qquad \mu = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_a^{a+\omega} \left[\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \frac{\theta'(x+\varpi)}{\theta(x+\varpi)} \right] dx,$$

et cela quel que soit x; cette équation détermine θ. On peut poser

$$(2) \qquad \frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \frac{\theta'(x+\varpi)}{\theta(x+\varpi)} = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \ldots,$$

et déterminer les coefficients indéterminés $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ par l'équation (1); cette équation n'en détermine qu'un seul, et nous supposerons alors, pour simplifier, $\beta = 0$, $\gamma = 0, \ldots$. La formule (1) donne alors

$$\mu = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_a^{a+\omega} \alpha\, dx = \frac{\alpha}{2\pi\sqrt{-1}},$$

d'où

$$\alpha = \frac{2\pi\mu\sqrt{-1}}{\omega},$$

et, en remplaçant $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ par leurs valeurs dans l'équation (2), on a

$$\frac{\theta'(x)}{\theta(x)} - \frac{\theta'(x+\varpi)}{\theta(x+\varpi)} = \frac{2\pi\mu\sqrt{-1}}{\omega},$$

ou, en intégrant,

$$\log \frac{\theta(x)}{\theta(x+\varpi)} = \frac{2\pi\mu\sqrt{-1}}{\omega}(x+c),$$

c désignant une constante. On en déduit

$$\theta(x+\varpi) = \theta(x) e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\mu(x+c)}.$$

Ainsi il suffira d'assujettir la fonction $\theta(x)$ aux conditions

$$(3) \qquad \begin{cases} \theta(x+\omega) = \theta(x), \\ \theta(x+\varpi) = \theta(x) e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\mu(x+c)}, \end{cases}$$

pour obtenir une fonction telle que nous la désirons. La première formule est satisfaite en posant

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega} nx}$$

ou

$$(4) \qquad \theta(x) = \Sigma e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}[nx+\varphi(n)]}.$$

Nous allons déterminer $\varphi(n)$ de manière à satisfaire à la seconde condition (3); on a

$$\theta(x+\varpi) = \Sigma e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}[nx+n\varpi+\varphi(n)]}$$
$$= \Sigma e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}[(n+\mu)x+\varphi(n+\mu)+\varphi(n)-\varphi(n+\mu)-\mu x+n\varpi]}.$$

Si l'on pose alors

$$(5) \qquad \varphi(n) - \varphi(n+\mu) + n\varpi = -c\mu,$$

on aura

$$\theta(x+\varpi) = \Sigma e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}[(n+\mu)x+\varphi(n+\mu)]} e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\mu(x+c)}$$

ou

$$\theta(x+\varpi) = \theta(x) e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\mu(x+c)},$$

et les formules (3) auront lieu. L'équation aux différences (5) ne détermine pas complétement $\varphi(x)$: elle

laisse arbitraires $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ..., $\varphi(\mu)$. En appelant $\varphi(m)$ une de ces quantités, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(m+\mu) &= \varphi(m) + c\mu + m\varpi,\\
\varphi(m+2\mu) &= \varphi(m+\mu) + c\mu + (m+\mu)\varpi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\varphi(m+i\mu) &= \varphi(m+\overline{i-1}\,\mu) + c\mu + (m+\overline{i-1}\,\mu)\varpi,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\varphi(m+i\mu) = \varphi(m) + i\mu c + \varpi\frac{i}{2}(2m - i\mu - \mu),$$

et $\theta(x)$ prend la forme suivante, en remplaçant $\varphi(n)$ dans (4) par sa valeur

$$\theta(x) = e^{\varphi(0)}\theta_0(x) + e^{\varphi(1)}\theta_1(x) + \ldots + e^{\varphi(\mu-1)}\theta_{\mu-1}(x),$$

où l'on a posé

$$(6) \qquad \theta_m(x) = \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\left[(m+i\mu)x + \mu i c + \frac{i}{2}\varpi(2m+i\mu-\mu)\right]}.$$

Donc :

1° *Les fonctions monodromes et monogènes satisfaisant aux formules*

$$(3) \qquad \begin{cases} \theta(x+\omega) = \theta(x),\\ \theta(x+\varpi) = \theta(x)e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\mu(x+c)} \end{cases}$$

sont fonctions linéaires et homogènes de μ *d'entre elles;*

2° *Ces fonctions existent réellement, car la série* (6) *est convergente si la partie imaginaire de* $\frac{\varpi}{\omega}$ *est positive, ce que l'on peut toujours supposer. En effet, alors la racine* $i^{\text{ième}}$ *du* $i^{\text{ième}}$ *terme de la série* (6) *tend vers zéro;*

3° *Ces fonctions ont μ zéros dans le parallélogramme des périodes ω, ϖ.*

Enfin le quotient de deux quelconques de ces fonctions a évidemment les périodes ω et ϖ, ce qui prouve, *a fortiori*, l'existence des fonctions à deux périodes arbitraires et à μ zéros ou du $\mu^{\text{ième}}$ ordre.

DES FONCTIONS DU PREMIER ORDRE.

Nous dirons qu'une fonction elliptique auxiliaire est d'ordre μ quand elle aura μ zéros dans son parallélogramme des périodes. Les fonctions du premier ordre satisfont aux équations

$$\theta(x+\omega)=\theta(x),$$
$$\theta(x+\varpi)=\theta(x)e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}(x+c)},$$

et, θ désignant l'une d'elles, les autres seront égales à θ, à un facteur constant près. On pourra alors poser

$$\theta=\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\left(mx+mc+\frac{m^2}{2}\varpi\right)}.$$

Nous retrouverons cette fonction plus loin. Observons toutefois qu'elle n'engendrera pas de fonctions aux périodes simultanées ω et ϖ; mais il faut remarquer que, si la fonction en question est du premier ordre par rapport aux périodes ω et ϖ, elle sera du second ordre si l'on prend pour périodes ω et 2ϖ ou 2ω et ϖ : c'est pour cela que, devant la rencontrer de nouveau dans tous les ordres, nous ne nous en occuperons pas ici.

DES FONCTIONS DU SECOND ORDRE.

Les fonctions du second ordre satisfont aux équations

$$(1)\quad \begin{cases} \theta(x+\omega)=\theta(x), \\ \theta(x+\varpi)=\theta(x)e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}2(x+c)}. \end{cases}$$

Elles sont au nombre de deux distinctes θ_0 et θ_1, la solution la plus générale étant $A_0\theta_0+A_1\theta_1$, A_0 et A_1 désignant deux constantes arbitraires. On a d'ailleurs

$$(2)\qquad \theta_0(x)=\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}[2ix+2ic+i^2\varpi-i\varpi]},$$

$$(3)\qquad \theta_1(x)=\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}[(2i+1)x+2ic+i^2\varpi]}.$$

Les fonctions qui servent de numérateur et de dénominateur à $\operatorname{sn} x$ sont du second ordre par rapport aux périodes $2K'\sqrt{-1}$ et $4K$. En effet, ces fonctions satisfont aux relations

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi(x+4K)=\varphi(x), \\ \varphi(x+2K'\sqrt{-1})=-\varphi(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})}. \end{cases}$$

Or la seconde de ces relations peut s'écrire

$$\varphi(x+2K'\sqrt{-1})=\varphi(x)e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{4K}2(x+K+K'\sqrt{-1})}.$$

Ces formules coïncideront donc avec (1), en posant

$$\omega=4K,\quad \varpi=2K'\sqrt{-1},\quad c=K+K'\sqrt{-1};$$

le numérateur et le dénominateur de $\operatorname{sn} x$ seront donc

de la forme $A_0\theta_0(x) + A_1\theta_1(x)$, et l'on aura

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \theta_0(x) &= \Sigma e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}[2ix+2iK+2i^2K'\sqrt{-1}]},\\ \theta_1(x) &= \Sigma e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}[(2i+1)x+2iK+2iK'\sqrt{-1}(i+1)]}. \end{aligned}\right.$$

Groupons les termes correspondant à des valeurs de i égales et de signes contraires, et posons toujours $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$, nous aurons

$$\theta_0(x) = 1 - 2q^{1^2}\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^{2^2}\cos\frac{2\pi x}{K} + \ldots$$
$$+ (-1)^i 2q^{i^2}\cos\frac{i\pi x}{K} + \ldots,$$
$$\theta_1(x) = \sqrt{-1}\left(2q^0 \sin\frac{\pi x}{2K} - 2q^{1(1+1)}\sin\frac{3\pi x}{2K} + \ldots\right.$$
$$\left. \pm 2q^{i(i+1)}\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2K} + \ldots\right).$$

Jacobi désigne la fonction θ_0 par $\Theta(x)$; quant à la fonction θ_1, nous la remplacerons par $\frac{q^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{-1}}\theta_1$, ce qui lui donne plus de symétrie, et nous la représenterons encore, avec Jacobi, par $H(x)$; nous aurons alors

$$\Theta(x) = 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{4} + \ldots + (-1)^i 2q^{i^2}\cos\frac{i\pi x}{K}\ldots,$$
$$H(x) = q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi x}{2K} - q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{3\pi x}{2K} + \ldots \pm q^{\frac{(2i+1)^2}{4}}\sin\frac{(2i+1)\pi x}{2K} \mp \ldots$$

Du reste, les fonctions les plus générales satisfaisant aux formules (4) sont de la forme $A\Theta(x) + BH(x)$.

Aux fonctions Θ et H on adjoint aujourd'hui les fonctions $\Theta(x+K)$, que l'on désigne par $\Theta_1(x)$, et $H(x+K)$, que l'on désigne par $H_1(x)$. Si, dans les formules (5), on remplace x par $x+K$, on trouve

alors

$$\Theta_1(x) = 1 + 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{\pi x}{K} + \ldots,$$

$$H_1(x) = 2q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi x}{2K} + 2q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{3\pi x}{2K} + \ldots.$$

Il existe entre les fonctions H et Θ une relation remarquable : quand on change x en $x + K'\sqrt{-1}$, Θ devient égal à $\sqrt{-1}\,H(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4K}(2x+K'\sqrt{-1})}$, ce que l'on vérifie sans peine en remplaçant x par $x + K'\sqrt{-1}$ dans $\Theta(x)$ ou, ce qui revient au même, dans son égal $\theta_0(x)$ exprimé par la formule (5).

Voici le détail du calcul :

$$\Theta(x) = \Sigma e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}(2ix + 2iK + 2i^2K'\sqrt{-1})},$$

$$\begin{aligned}\Theta(x + K'\sqrt{-1}) &= \Sigma e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}[2ix + 2iK + (2i^2+2i)K'\sqrt{-1}]}\\ &= e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4K}(2x + K'\sqrt{-1})}\,e^{-\frac{\pi K'}{4K}}\\ &\quad\times \Sigma e^{\frac{\pi\sqrt{-1}}{2K}[(2i+1)x + 2iK + 2i(i+1)K'\sqrt{-1}]}\\ &= \sqrt{-1}\,e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4K}(2x+K'\sqrt{-1})}\,H(x).\end{aligned}$$

On vérifiera facilement, d'une manière analogue, les formules non démontrées, que nous résumons dans le tableau suivant :

TABLEAU N° 1.

$$[1]\quad\left\{\begin{aligned}\Theta\ (x) &= 1 - 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} - 2q^9\cos\frac{3\pi x}{K} + \ldots,\\ \Theta_1(x) &= 1 + 2q\cos\frac{\pi x}{K} + 2q^4\cos\frac{2\pi x}{K} + 2q^9\cos\frac{3\pi x}{K} + \ldots,\\ H\ (x) &= 2q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi x}{2K} - 2q^{\frac{9}{4}}\sin\frac{3\pi x}{2K} + 2q^{\frac{25}{4}}\sin\frac{5\pi x}{2K} - \ldots,\\ H_1(x) &= 2q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi x}{2K} + 2q^{\frac{9}{4}}\cos\frac{3\pi x}{2K} + 2q^{\frac{25}{4}}\cos\frac{5\pi x}{2K} + \ldots,\end{aligned}\right.$$

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}.$$

$$[2]\quad \begin{cases} \Theta\,(x+K)=\Theta_1(x), & H\,(x+K)=H_1(x), \\ \Theta_1(x+K)=\Theta\,(x); & H_1(x+K)=-H(x). \end{cases}$$

$$[3]\quad \begin{cases} \Theta\,(x+2K)=\Theta\,(x), & H\,(x+2K)=-H\,(x), \\ \Theta_1(x+2K)=\Theta_1(x); & H_1(x+2K)=-H_1(x), \end{cases}$$

[4] $4K$ est une période de Θ, Θ_1, H, H_1.

$$[5]\quad \begin{cases} \Theta\,(x+2K'\sqrt{-1})=-\Theta(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})}, \\ \Theta_1(x+2K'\sqrt{-1})=\Theta_1(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})}, \\ H\,(x+2K'\sqrt{-1})=-H\,(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})}, \\ H_1(x+2K'\sqrt{-1})=H_1(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})}. \end{cases}$$

$$[6]\quad \begin{cases} \Theta\,(x+K'\sqrt{-1})=\sqrt{-1}\,H(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4K}(2x+K'\sqrt{-1})}, \\ \Theta_1(x+K'\sqrt{-1})=H_1(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4K}(2x+K'\sqrt{-1})}, \\ H\,(x+K'\sqrt{-1})=\sqrt{-1}\,\Theta(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4K}(2x+K'\sqrt{-1})}, \\ H_1(x+K'\sqrt{-1})=\Theta_1(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{4K}(2x+K'\sqrt{-1})}. \end{cases}$$

$$[7]\quad \begin{cases} \Theta\,(-x)=\Theta\,(x), & H\,(-x)=-H(x), \\ \Theta_1(-x)=\Theta_1(x), & H_1(-x)=H(x). \end{cases}$$

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS Θ, Θ_1, H, $H_1 = 0$.

On a évidemment

$$H(x)=0,$$

et, en vertu des formules [3] du tableau n° 1, comme

$$H(x+2K)=-H(x),$$

on a aussi

$$H(2K)=0.$$

$H(x)$ n'ayant que deux zéros dans le parallélogramme

des périodes $4K$ et $2K'\sqrt{-1}$, les zéros seront de la forme suivante :

$$4jK + 2j'K'\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad (4j+2)K + 2j'K'\sqrt{-1},$$

ou, si l'on veut,

$$(\mathrm{H}) \qquad 2jK + 2j'K'\sqrt{-1},$$

j et j' désignant deux entiers. Mais, d'après [2], $H(x)$ ést égal à $H_1(x+K)$; donc $H_1(x+K)$ est nul quand x est de la forme précédente; donc enfin les zéros de H_1 sont de la forme

$$(\mathrm{H}_1) \qquad (2j+1)K + 2j'K'\sqrt{-1};$$

enfin, en vertu de [6], les zéros de Θ sont ceux de H augmentés de $K'\sqrt{-1}$; ils sont compris dans la formule

$$(\Theta) \qquad 2jK + (2j'+1)K'\sqrt{-1};$$

ceux de Θ_1 sont compris, en vertu des mêmes formules [6], dans celle-ci :

$$(\Theta_1) \qquad (2j+1)K + (2j'+1)K'\sqrt{-1}.$$

TABLEAU N° 2.

$$[8]\left\{\begin{array}{lll} \text{Zéros de } \Theta(x)\ldots & 2jK + (2j'+1)K'\sqrt{-1}, \\ \quad\text{de } H(x)\ldots & 2jK + 2j'K'\sqrt{-1}, \\ \quad\text{de } \Theta_1(x)\ldots & (2j+1)K + (2j'+1)K'\sqrt{-1}, \\ \quad\text{de } H_1(x)\ldots & (2j+1)K + 2j'K'\sqrt{-1}. \end{array}\right.$$

NOUVELLES DÉFINITIONS DES FONCTIONS Θ, H, Θ_1, H_1.

Les fonctions Θ_1, H_1, Θ, H satisfont aux formules

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} \Theta_1(x+2K) = \Theta_1(x), \\ \Theta_1(x+2K'\sqrt{-1}) = \Theta_1(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}(x+K'\sqrt{-1})}. \end{array}\right.$$

$$(2)\quad \begin{cases} \Theta\,(x+2\mathrm{K}) = \Theta(x), \\ \Theta\,(x+2\mathrm{K}'\sqrt{-1}) = -\,\Theta(x)\,e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})}. \end{cases}$$

$$(3)\quad \begin{cases} \mathrm{H}_1(x+2\mathrm{K}) = -\,\mathrm{H}_1(x), \\ \mathrm{H}_1(x+2\mathrm{K}'\sqrt{-1}) = \mathrm{H}_1(x)\,e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})}. \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} \mathrm{H}\,(x+2\mathrm{K}) = -\,\mathrm{H}(x), \\ \mathrm{H}\,(x+2\mathrm{K}'\sqrt{-1}) = -\,\mathrm{H}(x)\,e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})}. \end{cases}$$

Si l'on ajoute que ces quatre fonctions sont synectiques et, par suite, développables en séries d'exponentielles, elles seront déterminées à un facteur constant près par ces quatre formules. Ce fait est déjà établi à l'égard de la fonction Θ_1; nous allons le prouver pour les autres fonctions.

Lorsque l'on a

$$(5)\quad \begin{cases} \theta(x+\omega) = \theta(x), \\ \theta(x+\varpi) = \theta(x)\,e^{-\frac{2\pi\sqrt{-1}}{\omega}\mu(x+c)}, \end{cases}$$

et que la fonction $\theta(x)$ est synectique, ces équations imposent à la fonction θ la forme

$$\mathrm{A}_0\theta_0(x) + \mathrm{A}_1\theta_1(x) + \ldots + \mathrm{A}_{\mu-1}\theta_{\mu-1}(x),$$

où A_0, A_1, ..., $\mathrm{A}_{\mu-1}$ sont des constantes et où θ_0, θ_1, ... désignent des solutions de (5). Si donc on fait $\mu = 2$, $\omega = 4\mathrm{K}$, $\varpi = 2\mathrm{K}'\sqrt{-1}$, $c = \mathrm{K}'\sqrt{-1}$, on aura

$$(6)\quad \begin{cases} \theta(x+4\mathrm{K}) = \theta(x), \\ \theta(x+2\mathrm{K}'\sqrt{-1}) = \theta(x)\,e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{\mathrm{K}}(x+\mathrm{K}'\sqrt{-1})}, \end{cases}$$

et $\theta(x)$ sera de la forme $\mathrm{A}_0\theta_0 + \mathrm{A}_1\theta_1$. Or les deux fonctions $\Theta_1(x)$ et $\mathrm{H}_1(x)$ satisfont à ces deux équations; leur solution générale sera donc

$$\mathrm{A}_0\Theta_1(x) + \mathrm{A}_1\mathrm{H}_1(x).$$

Si l'on ajoute que $\theta(x)$ s'annule pour une valeur donnée $K + K'\sqrt{-1}$, il faudra que $A_1 = 0$, et la fonction θ sera définie à un facteur près.

Ainsi les fonctions Θ_1, H_1, Θ, H sont définies par leurs zéros et par les formules telles que (6), que l'on peut déduire de (1), (2), (3), (4); mais elles ne sont définies qu'à un facteur constant près (on reconnaît dans H et Θ les valeurs qui figuraient en numérateur et en dénominateur dans $\operatorname{sn} x$).

SUR UNE FORMULE DE CAUCHY. — NOUVELLES EXPRESSIONS DE Θ, H, Θ_1, H_1 EN PRODUITS.

Posons

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} F(z) &= (1+qz)(1+qz^{-1})(1+q^3z)(1+q^3z^{-1})\ldots \\ &\quad \times (1+q^{2n+1}z)(1+q^{2n+1}z^{-1}). \end{aligned} \right.$$

Nous aurons évidemment

$$F(q^2z) = F(z)\,\frac{1+q^{2n+3}z}{1+qz}\,\frac{1+q^{-1}z^{-1}}{1+q^{2n-1}z^{-1}},$$

c'est-à-dire

$$(2)\qquad F(q^2z)(qz+q^{2n+2}) = F(z)(1+q^{2n+3}z).$$

Cette équation constitue une propriété de la fonction $F(z)$ qui va nous servir à la développer. $F(z)$ est de la forme

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} F(z) &= A_0 + A_1(z+z^{-1}) \\ &\quad + A_2(z^2+z^{-2}) + \ldots + A_n(z^n+z^{-n}). \end{aligned} \right.$$

Remplaçons dans (2) $F(z)$ par cette valeur, nous aurons

$$\begin{aligned} &[A_0 + A_1(q^2z+q^{-2}z^{-1}) + \ldots + A_n(q^{2n}z^n + q^{-2n}z^{-n})](qz+q^{2n+2}) \\ &= [A_0 + A_1(z+z^{-1}) + \ldots + A_n(z^n+z^{-n})](1+q^{2n+3}z), \end{aligned}$$

et, en égalant de part et d'autre les coefficients des

mêmes puissances de z,

$$A_0 q + A_1 q^{2n+4} = A_0 q^{2n+3} + A_1,$$
$$A_1 q^3 + A_2 q^{2n+6} = A_1 q^{2n+3} + A_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ou bien

$$A_0(q - q^{2n+3}) = A_1(1 - q^{2n+4}),$$
$$A_1(q^3 - q^{2n+3}) = A_2(1 - q^{2n+6}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$A_{n-1}(q^{2n-3} - q^{2n+3}) = A_n(1 - q^{4n+2}).$$

Or on connaît A_n; il est égal à $q q^3 q^5 \ldots q^{2n+1} = q^{n(n+1)}$, et l'on tire des formules précédentes

$$A_0 = q^{n(n+1)} \frac{(1 - q^{2n+4})(1 - q^{2n+6}) \ldots (1 - q^{4n+2})}{(q - q^{2n+3})(q^3 - q^{2n+3}) \ldots (q^{2n-1} - q^{2n+3})}.$$

Supposons $q < 1$, alors pour $n = \infty$ on aura

$$A_0 = \frac{1}{(1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)(1 - q^8) \ldots},$$
$$A_1 = q A_0, \quad A_2 = q^3 A_1, \quad \ldots,$$

et, par suite, en égalant les valeurs (1) et (3) de $F(z)$,

$$(1 + qz)(1 + qz^{-1})(1 + q^3 z)(1 + q^3 z^{-1}) \ldots$$
$$= \frac{1 + q(z + z^{-1}) + q^4(z^2 + z^{-2}) + q^9(z^3 + z^{-3}) + \ldots}{(1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)(1 - q^8) \ldots}.$$

Telle est la formule de Cauchy; quand on y fait $z = e^{\frac{\pi x\sqrt{-1}}{K}}$, et quand on observe qu'alors

$$(1 + q^{2n+1} z)(1 + q^{2n+1} z^{-1}) = 1 + 2q^{2n+1} \cos \frac{\pi x}{K} + q^{4n+2},$$
$$z^\mu + z^{-\mu} = 2 \cos \frac{\pi \mu x}{K},$$

elle donne

$$\left(1 + 2q \cos \frac{\pi x}{K} + q^2\right)\left(1 + 2q^3 \cos \frac{\pi x}{K} + q^6\right) \ldots$$
$$= \frac{1 + 2q \cos \frac{\pi x}{K} + 2q^4 \cos \frac{2\pi x}{K} + \ldots}{(1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6) \ldots}.$$

Si donc on désigne par c le produit

$$(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots,$$

on aura

$$\Theta_1(x) = c\left(1+2q\cos\frac{\pi x}{K}+q^2\right)\left(1+2q^3\cos\frac{\pi x}{K}+q^6\right)\ldots.$$

En changeant dans cette formule x en $x+K$, en $x+K'\sqrt{-1}$ et en $x+K+K'\sqrt{-1}$, on forme le tableau suivant :

TABLEAU N° 3.

$$c = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots.$$

[9]
$$\left\{\begin{aligned}
\Theta_1(x) &= c\left(1+2q\cos\frac{\pi x}{K}+q^2\right)\left(1+2q^3\cos\frac{\pi x}{K}+q^6\right)\ldots,\\
\Theta(x) &= c\left(1-2q\cos\frac{\pi x}{K}+q^2\right)\left(1-2q^3\cos\frac{\pi x}{K}+q^6\right)\ldots;\\
H_1(x) &= c2q^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\pi x}{2K}\left(1+2q^2\cos\frac{\pi x}{K}+q^4\right)\\
&\qquad\times\left(1+2q^4\cos\frac{\pi x}{K}+q^8\right)\ldots,\\
H(x) &= c2q^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\pi x}{2K}\left(1-2q^2\cos\frac{\pi x}{K}+q^4\right)\\
&\qquad\times\left(1-2q^4\cos\frac{\pi x}{K}+q^8\right)\ldots.
\end{aligned}\right.$$

RELATIONS ALGÉBRIQUES ENTRE Θ, H, Θ_1, H_1.

Considérons les fonctions Θ^2, H^2, Θ_1^2, H_1^2 ; elles satisfont toutes les quatre aux relations

$$\theta(x+2K) = \theta(x),$$
$$\theta(x+2K'\sqrt{-1}) = \theta(x)e^{-\frac{\pi\sqrt{-1}}{K}2(x+K'\sqrt{-1})};$$

donc deux des quatre fonctions en question sont des

fonctions linéaires et homogènes des deux autres. Posons alors

$$\Theta^2(x) = AH^2(x) + A_1 H_1^2(x);$$

on en conclura, pour $x = 0$ et $x = K$,

$$\Theta^2(0) = A_1 H_1^2(0), \quad \Theta^2(K) = AH^2(K).$$

D'ailleurs

$$H_1^2(0) = H^2(K);$$

on en déduit A et A_1, et la formule précédente donne

$$\Theta^2(x) = H^2(x)\frac{\Theta^2(K)}{H^2(K)} + H_1^2(x)\frac{\Theta^2(0)}{H_1^2(0)},$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$(1) \qquad \Theta^2(x) = H^2(x)\frac{\Theta_1^2(0)}{H_1^2(0)} + H_1^2(x)\frac{\Theta^2(0)}{H_1^2(0)}.$$

On trouve de même

$$\Theta^2(x) = H^2(x)\frac{\Theta(K + K'\sqrt{-1})}{H(K + K'\sqrt{-1})} + \Theta_1^2(x)\frac{\Theta^2(0)}{\Theta_1^2(0)};$$

mais (formules [6])

$$\frac{\Theta(K + K'\sqrt{-1})}{H(K + K'\sqrt{-1})} = \frac{H(K)}{\Theta(K)} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)};$$

donc

$$(2) \qquad \Theta^2(x) = H^2(x)\frac{H_1^2(0)}{\Theta_1^2(0)} + \Theta_1^2(x)\frac{\Theta^2(0)}{\Theta_1^2(0)}.$$

(A suivre.)

MÉMOIRE SUR LES TRANSFORMATIONS DU SECOND ORDRE DANS LES FIGURES PLANES;

PAR M. E. AMIGUES,
Professeur de Mathématiques spéciales au lycée de Nice.

[SUITE (*).]

DEUXIÈME PARTIE.

12. Dans cette deuxième Partie de notre travail nous nous proposons d'étudier les transformations corrélatives des précédentes.

Nous avons fait voir que deux relations homogènes et du premier degré, soit en x, y, z, soit en x', y', z', pouvaient toujours se ramener à la forme suivante :

$$\lambda XX' = \mu YY' = \nu ZZ',$$

X, Y, Z étant des fonctions linéaires et homogènes de x, y, z convenablement choisies, et X′, Y′, Z′ étant de même des fonctions linéaires et homogènes de x', y', z' convenablement choisies. Ce principe nous sera bientôt utile.

Soit dans un plan P un système d'axes yox et désignons par $\frac{p}{r}$, $\frac{q}{r}$ les coordonnées tangentielles d'une droite

$$(1) \qquad px + qy - rz = 0.$$

Imaginons dans un autre plan P′ un autre système d'axes $y'o'x'$, et soient $\frac{p'}{r'}$, $\frac{q'}{r'}$ les coordonnées tangentielles d'une droite

$$(2) \qquad p'x' + q'y' - r'z' = 0.$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVI, p. 422, 451.

Si l'on se donne entre p, q, r, p', q', r' deux relations algébriques linéaires et homogènes, soit en p, q, r, soit en p', q', r', on a une transformation du second ordre, c'est-à-dire une transformation algébrique dans laquelle, à toute droite de chaque figure, correspond sur l'autre figure une droite, et une seule.

Mais les relations dont nous venons de parler peuvent se mettre sous une forme plus simple. A cet effet, prenons dans la première figure un triangle de référence ABC, que nous laisserons arbitraire, et, pour faciliter les interprétations géométriques, choisissons les paramètres de référence égaux à l'unité. Les formules de transformation ont la forme suivante :

$$x = aX + a_1 Y + a_2 Z,$$
$$y = bX + b_1 Y + b_2 Z,$$
$$z = cX + c_1 Y + c_2 Z.$$

L'équation de la droite (1) en coordonnées trilatères est donc

$$(ap + bq - cr)X + (a_1 p + b_1 q - c_1 r)Y + (a_2 p + b_2 q - c_2 r)Z = 0$$

ou bien

$$PX + QY + RZ = 0, \tag{3}$$

P, Q, R étant trois fonctions linéaires et homogènes de p, q, r que nous pouvons choisir à volonté, puisqu'on a laissé le triangle de référence indéterminé.

De la même façon, si l'on prend dans l'autre figure un triangle de référence arbitraire A'B'C' et des paramètres de référence égaux à l'unité, l'équation de la droite (2) peut s'écrire

$$P'X' + Q'Y' + R'Z' = 0. \tag{4}$$

P', Q', R' étant trois fonctions linéaires, homogènes et arbitraires de p', q', r'.

Alors, d'après le principe rappelé ci-dessus et démontré dans la première partie de ce travail, les deux relations entre p, q, r, p', q', r' peuvent être remplacées par les suivantes :

$$\lambda PP' = \mu QQ' = \nu RR', \tag{5}$$

pourvu, bien entendu, que les deux triangles de référence demeurent arbitraires, ainsi que les constantes λ, μ, ν.

Dans ces conditions, les relations (5) définissent les transformations algébriques les plus générales dans lesquelles, à toute droite (3) de l'une des figures, correspond sur l'autre figure une droite (4), et une seule.

13. A une droite

$$PX + QY + RZ = o$$

correspond une autre droite

$$\frac{X'}{\lambda P} + \frac{Y'}{\mu Q} + \frac{Z'}{\nu R} = o.$$

A toute courbe dont l'équation tangentielle homogène est

$$F(P, Q, R) = o$$

correspond une courbe ayant pour équation tangentielle

$$\left(\frac{1}{\lambda P'}, \frac{1}{\mu Q'}, \frac{1}{\nu R'}\right) = o,$$

en sorte que, si la première courbe est de classe n, la seconde est en général de classe $2n$.

A la droite $BC(X = o)$ correspondent toutes les droites passant par le sommet $A'(Y' = o, Z' = o)$; même remarque pour les six côtés des triangles de référence.

Comme, d'autre part, dans la figure ABC, on peut

mener du point A n tangentes à une courbe de classe n, la droite $B'C'$ est tangente d'ordre n à la courbe transformée. Ainsi cette courbe transformée, qui est de classe $2n$, est tangente n fois aux trois côtés du triangle $A'B'C'$.

En particulier, à un point de la figure ABC

$$\alpha P + \beta Q + \gamma R = 0$$

correspond une conique inscrite au triangle $A'B'C'$

$$\frac{\alpha}{\lambda P'} + \frac{\beta}{\mu Q'} + \frac{\gamma}{\nu R'} = 0.$$

D'après cela, un point doit être considéré comme une courbe de la première classe.

Si la courbe de la classe n est tangente à la droite BC ($X = 0$), le point A' ($Y' = 0$, $Z' = 0$) fait partie de la seconde courbe, dont la classe est ainsi abaissée d'une unité. Si la courbe de classe n est tangente f fois à la droite BC, la classe de la transformée s'abaisse de f unités. Et de même, si la courbe de classe n est tangente g fois à la droite AC, la classe de la transformée s'abaisse de g unités. Mais alors la droite $A'B'$ n'est plus tangente d'ordre n dans la courbe transformée. En effet, du point C on ne peut mener, outre CA et BC, que $(n - f - g)$ tangentes à la courbe d'ordre n, et par conséquent $A'B'$ n'est plus qu'une tangente d'ordre $n - f - g$.

En résumé, quand la courbe de classe n est tangente f, g, h fois à BC, AC, AB, la deuxième courbe est de classe

$$2n - f - g - h,$$

et elle est tangente

$$\begin{aligned} n - g - h &\text{ fois à } B'C', \\ n - h - f &\text{ fois à } A'C', \\ n - f - g &\text{ fois à } A'B'. \end{aligned}$$

14. A toute tangente d'ordre K d'une courbe correspond dans la transformée une tangente d'ordre K : il n'y a exception que pour les côtés des triangles de référence, qui sont des tangentes multiples appartenant en propre à chaque courbe. Ce principe évident permet de calculer l'ordre de la transformée.

Soit une courbe de classe n tangente aux trois droites BC, AC, AB, f, g, h fois. La transformée est de classe

$$2n - f - g - h,$$

et elle est tangente

$$n - g - h \text{ fois à } B'C',$$
$$n - h - f \text{ fois à } A'C',$$
$$n - f - g \text{ fois à } A'B'.$$

Soient d'ailleurs m l'ordre de la première courbe, x celui de la seconde. Pour calculer x passons aux figures corrélatives.

La première courbe devient d'ordre n et de classe m avec trois points multiples d'ordre f, g, h lui appartenant en propre.

La deuxième courbe devient d'ordre $2n - f - g - h$ et de classe x, avec trois points multiples d'ordre $n - g - h$, $n - f - h$, $n - f - g$, lui appartenant en propre.

A part les points multiples qui précèdent, tout point multiple d'ordre K a pour correspondant un point multiple de même ordre. Ces points multiples communs produisent dans les deux courbes un même abaissement de classe que nous appellerons w.

Désignons par y et par z les abaissements de classe provoqués dans la première et dans la seconde courbe par les points multiples qu'elles possèdent en propre.

On a les équations suivantes :

$$(10)\quad \begin{cases} n(n-1)-m=w+y, \\ (2n-f-g-h)(2n-f-g-h-1)-x=w+z, \end{cases}$$

$$(11)\quad \begin{cases} y=f(f-1)+g(g-1)+h(h-1), \\ z=(n-f-g)(n-f-g-1) \\ \quad +(n-g-h)(n-g-h-1) \\ \quad +(n-h-f)(n-h-f-1). \end{cases}$$

Éliminant w, y, z, on obtient

$$x=m+2n-2(f+g+h).$$

Pour $f=g=h=0$,

$$x=m+2n.$$

15. Il est facile de voir que, si deux courbes se touchent dans l'une des figures, les courbes correspondantes de l'autre figure se touchent aussi.

En effet, cherchant dans l'une des figures les tangentes communes à deux courbes quelconques S et U, on obtient, pour calculer P, Q, R, deux équations de la forme

$$f(P, Q, R)=0,$$
$$\varphi(P, Q, R)=0,$$

qui d'ailleurs ne sont autre chose que les équations tangentielles des deux courbes.

A toute tangente commune (P_1, Q_1, R_1) correspond, dans l'autre figure, une droite (P'_1, Q'_1, R'_1), qui est tangente commune aux deux courbes correspondantes S' et U'.

Si les courbes S et U deviennent tangentes, deux solutions (P_1, Q_1, R_1) et (P_2, Q_2, R_2) deviennent égales. Alors les solutions correspondantes (P'_1, Q'_1, R'_1) et (P'_2, Q'_2, R'_2) deviennent égales aussi. On peut con-

clure de là que les deux courbes S' et U' deviennent tangentes.

Toutefois, pour que cette conclusion soit légitime, il faut se demander si, lorsque deux tangentes communes aux courbes S' et U' viennent à se confondre, ces deux courbes deviennent nécessairement tangentes. Or il est visible que ces deux courbes pourraient ne pas devenir tangentes, si l'une des tangentes communes, restant tangente simple à la courbe U', devenait tangente double à la courbe S'. Mais alors la tangente correspondante serait tangente simple à la courbe U et tangente double à la courbe S, cas particulier peu intéressant et d'ailleurs facile à étudier.

16. La remarque qui précède est très-importante. Elle donne le théorème suivant. L'enveloppe d'un système de courbes et l'enveloppe des courbes correspondantes se correspondent (A).

Comme cas particulier, le lieu d'un point correspond à l'enveloppe de la conique qui correspond à ce point (B).

Par suite, lorsqu'un point décrit une courbe de classe n, la conique correspondante enveloppe une courbe de classe $2n$ (C).

17. L'un des avantages de la transformation consiste à prendre une propriété d'une courbe quelconque de classe n et à voir ce qu'elle devient dans la transformée, qui est une courbe de classe $2n$ ayant trois tangentes d'ordre n. Mais, pour que cette opération soit légitime, il ne faut employer que des modes de transformation pour lesquels *toute courbe* de classe $2n$, ayant trois tangentes d'ordre n, peut être considérée comme la transformée d'une courbe de classe n. De là la nécessité de reconnaître les modes de transformation qui satisfont à

cette condition. On y parvient par la règle suivante. Pour qu'une courbe quelconque de classe $2n$ à trois tangentes d'ordre n puisse être considérée comme la transformée d'une courbe de classe n, il faut et il suffit que le procédé de transformation laisse arbitraire le triangle de référence dans la figure qui contient la courbe de classe $2n$.

Cette condition est évidemment nécessaire.

Elle est suffisante. En effet, soit une courbe de classe $2n$ à trois tangentes d'ordre n. Prenons ces tangentes pour côtés du triangle de référence dans la figure qui contient la courbe de classe $2n$. Pour déterminer une courbe de classe $2n$, il faut $\frac{2n(2n+3)}{2}$ tangentes, ainsi qu'on le voit en passant à la figure corrélative. Mais les trois tangentes d'ordre n, d'après cette même figure corrélative, valent $\frac{3n(n+1)}{2}$ tangentes simples. La courbe est donc déterminée si l'on se donne, outre les trois tangentes d'ordre n, un nombre de tangentes égal à

$$\frac{2n(2n+3)}{2} - \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2}.$$

A ces tangentes, que l'on peut se donner pour déterminer la courbe, correspond dans l'autre figure un nombre égal de tangentes, qui définissent précisément une courbe de classe n.

18. A un point P, défini par les équations

$$\frac{X}{a} = \frac{Y}{b} = o,$$

correspond dans l'autre figure une conique. Cherchons les coordonnées du centre de cette conique.

Une droite passant par le point P a pour équation

$$cX - aZ + K(cY - bZ) = 0.$$

La droite correspondante de l'autre figure a pour équation

$$\frac{X'}{\lambda c} + \frac{Y'}{\mu K c} - \frac{Z'}{\nu(a + bK)} = 0.$$

Lorsque K varie, cette dernière droite enveloppe une conique. Choisissons K de manière à avoir la tangente à la conique qui est parallèle à B'C'. L'équation de cette tangente est

$$(12) \qquad \frac{-a\mu\nu \sin B' \sin C'}{\lambda(c\mu \sin B' + b\nu \sin C')} X' + Y' \sin B' + Z' \sin C' = 0.$$

Si d'ailleurs on désigne par S' et R' l'aire du triangle A'B'C' et le rayon du cercle circonscrit à ce triangle, on a pour tout point

$$(13) \qquad X' \sin A' + Y' \sin B' + Z' \sin C' = \frac{S'}{R'}.$$

Retranchant (12) de (13) et remplaçant S' par sa valeur en R', A', B', C',

$$X' = \frac{2R'\left(\frac{c}{\nu} \sin B' + \frac{b}{\mu} \sin C'\right)}{\frac{a}{\lambda \sin A'} + \frac{b}{\mu \sin B'} + \frac{c}{\nu \sin C'}}.$$

Cette valeur représente avec son signe la distance du point de contact à la droite B'C'. Pour le centre de la conique, cette distance est deux fois moindre.

On a donc pour le centre, en remplaçant a, b, c par les quantités proportionnelles,

$$(14) \qquad X' = \frac{R'\left(\frac{Z}{\nu} \sin B' + \frac{Y}{\mu} \sin C'\right)}{\frac{X}{\lambda \sin A'} + \frac{Y}{\mu \sin B'} + \frac{Z}{\nu \sin C'}};$$

on aurait par analogie Y' et Z'.

D'après la formule (14), la conique est une parabole, si le point correspondant est sur la droite représentée par l'équation

$$(15)\qquad \frac{X}{\lambda \sin A'} + \frac{Y}{\mu \sin B'} + \frac{Z}{\nu \sin C'} = 0.$$

Ainsi le lieu des points de la figure ABC qui se transforment en paraboles est une droite représentée par l'équation (15) et que pour ce motif nous appellerons la *droite parabolique.*

19. De la formule (14) et des deux analogues on déduit sans difficulté

$$\frac{X'}{\frac{Z}{\nu}\sin B' + \frac{Y}{\mu}\sin C'} = \frac{Y'}{\frac{X}{\lambda}\sin C' + \frac{Z}{\nu}\sin A'} = \frac{Z'}{\frac{Y}{\mu}\sin A' + \frac{X}{\lambda}\sin B'};$$

ces dernières formules prouvent que, si le point X, Y, Z décrit une courbe dans son plan, le centre de la conique correspondante décrit une courbe homographique, et, par conséquent, une courbe de même ordre et de même classe.

De là le théorème suivant :

Si une conique, tangente aux trois côtés d'un triangle, est aussi tangente à une courbe de classe $2n$ ayant les trois côtés de ce triangle pour tangentes d'ordre n, le centre de cette conique décrit une courbe de classe n.

Deux cas particuliers de ce théorème ne sont point nouveaux :

1° Pour $n = 0$, on a le célèbre théorème de Newton sur le lieu des centres des coniques inscrites à un quadrilatère.

2° Pour $n = 2$, on a un théorème que M. Gohierre de Longchamps a déduit de celui de Newton (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. III).

20. Considérons toutes les courbes de quatrième classe bitangentes aux trois côtés d'un triangle. Nous pouvons imposer à ces courbes cinq conditions nouvelles. Si nous ne leur en imposons que quatre, nous avons un système de courbes. Nous appellerons *caractéristiques* d'un de ces systèmes les nombres μ' et ν', qui indiquent combien de courbes du système passent par un point donné et combien touchent une droite donnée.

Dans l'autre figure on a un système de coniques assujetties, non aux mêmes conditions, mais aux *quatre conditions correspondantes.* On sait que l'on appelle *caractéristiques* de ce système de coniques les nombres μ et ν, qui expriment combien de coniques du système passent par un point donné et combien touchent une droite donnée. On sait aussi que l'on peut trouver les nombres μ et ν.

Nous allons montrer comment les nombres μ' et ν' se calculent en fonction des nombres μ et ν.

μ', nombre des courbes qui passent par un point, est égal au nombre des coniques du système (μ, ν) tangentes à la conique qui correspond au point, c'est-à-dire égal à $2(\mu + \nu)$. On a donc

$$(16) \qquad \mu' = 2(\mu + \nu).$$

ν', nombre des courbes tangentes à une droite, est égal au nombre des coniques du système (μ, ν) tangentes à la droite correspondante. On a donc

$$(17) \qquad \nu' = \nu.$$

On remarquera que le nombre μ' est nécessairement pair.

Reste à montrer comment les propriétés d'un système (μ', ν') s'expriment en fonction de ses caractéristiques.

On sait que plusieurs propriétés des coniques du système (μ, ν) se présentent sous la forme suivante.

L'enveloppe d'une ligne γ, dans un système de coniques (μ, ν), est de la classe

$$\alpha\mu + \beta\nu.$$

Transformons cet énoncé; nous aurons le suivant. L'enveloppe d'une ligne γ' dans un système de courbes de quatrième classe ayant trois tangentes doubles communes (μ', ν') est une courbe de la classe

$$2\left(\alpha\frac{\mu'-2\nu'}{2}+\beta\nu'\right),$$

ayant trois tangentes multiples d'ordre moitié moindre confondues avec les trois tangentes doubles.

Donnons un exemple. On a un système de coniques (μ, ν) et une conique U. Les cordes communes à la conique U et à chaque conique du système enveloppent une courbe de classe 3μ.

En transformant cet énoncé, on obtient le suivant. On a un système de courbes de la quatrième classe ayant trois tangentes doubles communes (μ', ν') et aussi une courbe de quatrième classe U′ ayant les mêmes tangentes doubles. On imagine deux coniques tangentes aux trois tangentes doubles, à la courbe U′ et à une courbe du système. Les tangentes communes à ces deux coniques enveloppent une courbe de classe

$$3(\mu'-2\nu'),$$

ayant les tangentes doubles pour tangentes d'ordre moitié moindre.

(*A suivre.*)

THÉORIE DES INDICES;

PAR M. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]

---

145. Si l'on donne au paramètre φ les valeurs particulières $\frac{I_A}{I'_A}, \frac{I_B}{I'_B}, \frac{I_C}{I'_C}, \frac{I_D}{I'_D}$, les surfaces du système sont des coniques situées sur les faces du tétraèdre conjugué commun aux deux surfaces S et S'. Par exemple, pour $\varphi = \frac{I_D}{I'_D}$, la surface correspondante a pour équation par plans, par droites et par points, respectivement,

$$\frac{I_A I'_D - I_D I'_A}{(a, A)^2}(a, E)^2 + \frac{I_B I'_D - I_D I'_B}{(b, B)^2}(b, E)^2 + \frac{I_C I'_D - I_D I'_C}{(c, C)^2}(c, E)^2 = 0,$$

$$\frac{\overline{\sin}^2 AD}{I_A I'_D - I_D I'_A}\frac{|\varepsilon, \alpha|^2}{|\lambda, \alpha|^2} + \frac{\overline{\sin}^2 BD}{I_B I'_D - I_D I'_B}\frac{|\varepsilon, \beta|^2}{|\mu, \beta|^2} + \frac{\overline{\sin}^2 CD}{I_C I'_D - I_D I'_C}\frac{|\varepsilon, \gamma|^2}{|\nu, \gamma|^2} = 0,$$

$$(e, D)^2 = 0;$$

cela résulte des relations (1), (2), (3).

Les quatre coniques que nous obtenons ainsi sont les lignes de striction de Poncelet. Deux d'entre elles suffisent pour déterminer la développable (SS').

Si les surfaces S, S' sont concentriques, la développable qu'elles déterminent a une ligne de striction à l'infini, et réciproquement; si, de plus, cette conique coïncide avec le cercle imaginaire de l'infini, les sur-

---

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 481, 529, et t. XVI, p. 5, 160, 193, 249, 289.

faces sont homofocales. Les lignes de striction prennent dans ce cas le nom de *focales*.

146. *Si le point e d'une ligne de striction de la développable* (SS′) *est pris pour sommet d'un cône circonscrit à l'une des surfaces* S *du système, ce cône aura un double contact avec toutes les surfaces du système*. Car, si nous menons la tangente au point e de la ligne de striction, on pourra par cette tangente mener deux plans tangents à S. Mais ces plans touchent aussi la ligne de striction; donc ils toucheront toutes lès surfaces.

Lorsque, en particulier, les surfaces sont homofocales, on voit que, si l'on prend un point d'une focale pour sommet d'un cône circonscrit à l'une des surfaces, il aura un double contact avec toutes les autres; ce cône sera par conséquent de révolution, puisqu'il aura un double contact avec le cercle imaginaire de l'infini, qui est une des surfaces du système.

Des surfaces du second degré qui ont la même intersection.

147. Désignons par I_e, I'_e les indices d'un point e par rapport aux deux surfaces S et S′; si l'on a entre ces indices la relation

$$I_e - \varphi I'_e = 0,$$

dans laquelle φ est un paramètre donné, le point e décrira une surface Φ qui passera par l'intersection des surfaces S et S′.

On sait que deux surfaces admettent un même tétraèdre autopolaire *abcd*, et l'on voit, d'après la forme de la relation précédente, que ce tétraèdre est aussi con-

jugué à toutes les surfaces Φ qui passent par l'intersection SS'.

Des relations établies (85, 30°) on déduit les suivantes :

$$I_{ee'} = \sum \frac{(e, A)(e', A)}{(a, A)^2} I_a \qquad (4 \text{ termes}),$$

$$I_{\varepsilon\varepsilon'} = \sum \frac{|\varepsilon, \nu|\,|\varepsilon', \nu|}{|\gamma, \nu|^2} \frac{I_a I_b}{\overline{ab}^2} \qquad (6 \text{ termes}),$$

$$-\pi^2 I_{EE'} = \sum \frac{(a, E)(a, E')}{I_a} \qquad (4 \text{ termes}).$$

Elles donnent l'indice du système de deux points, de deux droites et de deux plans à l'aide de formules qui ne contiennent que les indices des sommets du tétraèdre autopolaire *abcd*.

148. Il suit de là que, si nous prenons dans l'espace deux points e, e', deux droites ε, ε', deux plans E, E', les paramètres des surfaces menées par l'intersection SS', et qui sont respectivement conjuguées aux points, aux droites et aux plans, sont déterminés par les relations

$$(1) \qquad 0 = \sum \frac{(e, A)(e, A')}{(a, A)^2} (I_a - \varphi I'_a),$$

$$(2) \qquad 0 = \sum \frac{|\varepsilon, \nu|\,|\varepsilon', \nu|}{|\gamma, \nu|^2} \frac{(I_a - \varphi I'_a)(I_b - \varphi I'_b)}{\overline{ab}^2},$$

$$(3) \qquad 0 = \sum \frac{(a, E)(a, E')}{I_a - \varphi I'_a}.$$

Si l'on développe ces équations en tenant compte des relations établies (85), on trouvera

$$(1)' \qquad 0 = I_{ee'} - \varphi I'_{ee'},$$

$$(2)' \qquad 0 = I_{\varepsilon\varepsilon'} - \varphi \sum \frac{|\varepsilon, \nu|\,|\varepsilon', \nu|}{|\gamma, \nu|^2} \frac{I_a I'_b + I_b I'_a}{\overline{ab}^2} + \varphi^2 I'_{\varepsilon\varepsilon'},$$

$$(3)' \qquad 0 = I_{EE'} - \varphi m' + \varphi^2 m - \varphi^3 I'_{EE'}.$$

Nous avons posé

$$m = \text{I}_{\text{EE}'} \sum \frac{\text{I}_a}{\text{I}'_a} + \frac{1}{\pi'^2} \sum \frac{(a, \text{E})(a, \text{E}')\text{I}_a}{\text{I}'^2_a},$$

$$m' = \text{I}_{\text{EE}'} \sum \frac{\text{I}'_a}{\text{I}_a} + \frac{1}{\pi^2} \sum \frac{(a, \text{E})(a, \text{E}')\text{I}'_a}{\text{I}^2_a},$$

π et π' désignant les produits des demi-axes des surfaces S et S′. Ces relations montrent que par l'intersection SS′ on peut mener une surface conjuguée au système de deux points, deux surfaces conjuguées au système de deux droites, trois surfaces conjuguées au système de deux plans.

149. Lorsque le point e' coïncide avec le point e, la droite ε' avec ε, le plan E′ avec le plan E, les équations (1), (2), (3) ou leurs transformées sont respectivement l'équation par points, l'équation par droites et l'équation par plans de la surface Φ menée par l'intersection SS′.

Si l'on donne à φ les valeurs particulières $\frac{\text{I}_a}{\text{I}'_a}$, $\frac{\text{I}_b}{\text{I}'_b}$, $\frac{\text{I}_c}{\text{I}'_c}$, $\frac{\text{I}_d}{\text{I}'_d}$, les surfaces du système sont des cônes qui ont pour sommets les sommets a, b, c, d du tétraèdre autopolaire. Par exemple, pour $\varphi = \frac{\text{I}_d}{\text{I}'_d}$, la surface correspondante a pour équation par points, par droites et par plans,

$$\frac{\text{I}_a\text{I}'_d - \text{I}_d\text{I}'_a}{(a, \text{A})^2}(e, \text{A})^2 + \frac{\text{I}_b\text{I}'_d - \text{I}_d\text{I}'_b}{(b, \text{B})^2}(e, \text{B})^2 + \frac{\text{I}_c\text{I}'_d - \text{I}_d\text{I}'_c}{(c, \text{C})^2}(e, \text{C})^2 = 0,$$

$$\frac{|\varepsilon, \lambda|^2 \overline{da}^2}{\text{I}_a\text{I}'_d - \text{I}_d\text{I}'_a} + \frac{|\varepsilon, \mu|^2 \overline{db}^2}{\text{I}_b\text{I}'_d - \text{I}_d\text{I}'_b} + \frac{|\varepsilon, \nu|^2 \overline{dc}^2}{\text{I}_c\text{I}'_d - \text{I}_d\text{I}'_c} = 0,$$

$$(d, \text{E})^2 = 0.$$

Cela résulte immédiatement des relations (1), (2), (3).

150. On peut encore écrire sous une forme plus générale, et indépendante de tout système de coordonnées, les équations des surfaces inscrites à la développable (SS′) ou qui passent par l'intersection de ces mêmes surfaces.

Si, en effet, S et S′ sont les équations par points des deux surfaces données, $S + kS'$ est l'équation d'une surface S″ qui passe par l'intersection des deux premières; or les expressions S et S′ sont proportionnelles aux indices d'un point variable e par rapport à ces deux surfaces; par conséquent, si I, I′, I″ indiquent les indices pris par rapport aux trois surfaces S, S′, S″, il existera entre ces indices une relation de la forme

$$I''_e = \lambda I_e + \lambda' I'_e,$$

dans laquelle λ et λ′ sont des constantes.

De même, entre les indices d'un plan variable E, pris par rapport à trois surfaces S, S′, S″ inscrites à la même développable, il existera la relation

$$I''_E = \lambda I_E + \lambda' I'_E.$$

151. Considérons la première. Par rapport aux surfaces S et S′, l'indice du système de deux points e, e' est donné par les relations

$$I_{ee'} = \sum \frac{(e, A)(e', A)}{(a, A)^2} I_a, \quad I'_{ee'} = \sum \frac{(e, A)(e', A)}{(a, A)^2} I'_a,$$

les deux surfaces étant rapportées à leur tétraèdre conjugué commun $abcd$. Mais la surface S″ étant aussi conjuguée à ce tétraèdre, on a

$$I''_{ee'} = \sum \frac{(e, A)(e', A)}{(a, A)^2} I''_a = \sum \frac{(e, A)(e', A)}{(a, A)^2} (\lambda I_a + \lambda' I'_a),$$

ou bien

$$I''_{ee'} = \lambda I_{ee'} + \lambda' I'_{ee'}.$$

Ainsi il existera entre les indices d'un système de deux points une relation de même forme que celle qui existait entre les indices d'un seul point.

Il résulte de là que, si sur des droites ε, ε' nous prenons respectivement les points arbitraires e, f et e', f', nous pourrons, en appliquant à la surface S″ la relation 4° du n° 2, écrire

$$\begin{vmatrix} \lambda I_{ee'} + \lambda' I'_{ee'} & \lambda I_{ef'} + \lambda' I'_{ef'} \\ \lambda I_{fe'} + \lambda' I'_{fe'} & \lambda I_{ff'} + \lambda' I'_{ff'} \end{vmatrix} = ef.e'f' I''_{\varepsilon\varepsilon'},$$

et que de même, si dans des plans E, E′ nous prenons les points arbitraires efg, $e'f'g'$, nous pourrons, en appliquant à la surface S″ la relation 3° du n° 2, écrire

$$\begin{vmatrix} \lambda I_{ee'} + \lambda' I'_{ee'} & \lambda I_{ef'} + \lambda' I'_{ef'} & \lambda I_{eg'} + \lambda' I'_{eg'} \\ \lambda I_{fe'} + \lambda' I'_{fe'} & \lambda I_{ff'} + \lambda' I'_{ff'} & \lambda I_{fg'} + \lambda' I'_{fg} \\ \lambda I_{ge} + \lambda' I'_{ge'} & \lambda I_{gf'} + \lambda' I'_{gf'} & \lambda I_{gg'} + \lambda' I'_{gg'} \end{vmatrix} = 4 efg.e'f'g' I''_{EE'}.$$

En établissant la coïncidence entre les deux systèmes de points, ces relations nous donneront l'indice de la droite ε et du plan E par rapport à la surface S″; donc, si dans cette supposition on égale à zéro les premiers membres de ces équations, on obtiendra les équations par droites et par plans de la surface S″.

Du développement de la première on déduit

$$I''_\varepsilon = \lambda^2 I_\varepsilon + \frac{\lambda\lambda'}{\overline{ef}^2} \left\{ \begin{vmatrix} I_{ee} & I'_{ef} \\ I_{fe} & I'_{ff} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} I'_{ee} & I_{ef} \\ I'_{fe} & I_{ff} \end{vmatrix} \right\} + \lambda'^2 I'_\varepsilon.$$

152. La seconde relation donne lieu à des considérations analogues, en ayant égard aux théorèmes du n° 8. Ainsi, en désignant par EF, E′F′ deux couples de plans passant respectivement par les droites ε, ε', et remplaçant dans le premier des déterminants écrits ci-dessus les petites lettres par des lettres majuscules, on

obtient la valeur de $-\frac{1}{\pi''^2}\sin EF \sin E'F'I''_{\epsilon'}$, en appelant π'' le produit des demi-axes de la surface S''.

Si E, F, G et E′, F′, G′ sont des plans passant, les premiers par le point e, les seconds par le point e', en remplaçant dans le second déterminant les petites lettres par les lettres majuscules, on obtient la valeur de

$$\frac{1}{\pi''^4}\sin EFG \sin E'F'G'I''_{ee'}.$$

De la première de ces équations on déduit

$$\frac{I''_{\iota}}{\pi''^2} = \lambda^2\frac{I_{\iota}}{\pi^2} - \frac{\lambda\lambda'}{\sin^2 EF}\left\{\begin{vmatrix} I_{EE} & I'_{EF} \\ I_{FE} & I'_{FF}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} I'_{EE} & I_{EF} \\ I'_{EF} & I_{FF}\end{vmatrix}\right\} + \lambda'^2\frac{I'_{\iota}}{\pi'^2}.$$

Égalé à zéro, ce second membre donne l'équation par droites de la surface S'' inscrite à la développable (SS′). La seconde donnerait l'équation par points de cette même surface.

153. La première relation (**144**)

$$0 = I_{EE'} - \varphi I'_{EE'}$$

montre que, *si deux plans sont conjugués à deux surfaces du système, ils sont conjugués à toutes les surfaces du système.*

Il suit de là que, *si les plans* E, E′ *touchent respectivement les surfaces* S *et* S′ *en un point de l'intersection de ces surfaces, ces plans,* étant évidemment conjugués aux surfaces S et S′, *seront conjugués à toutes les surfaces inscrites à la développable* (SS′).

De même, *si trois surfaces inscrites à cette développable se coupent en un point e, les plans tangents menés en ce point à chacune de ces surfaces formeront un trièdre conjugué à toutes les surfaces inscrites à la développable* (SS′).

D'après la relation (2), il y a deux surfaces inscrites à cette développable qui touchent une droite donnée ε; si par cette droite on mène un plan tangent à chacune de ces surfaces, ils sont conjugués à chacune d'elles; donc *ces deux plans tangents sont aussi conjugués à toutes les surfaces inscrites à la développable* (SS′).

Si l'on prend les pôles d'un plan E par rapport aux surfaces inscrites à la développable (SS′), ces pôles seront sur une droite facile à déterminer. Menons en effet la surface inscrite à la développable qui touche le plan E, et soit e son point de contact; il y a deux autres surfaces du système qui passent par ce point e, et si E′, E″ sont les plans tangents de ces surfaces en ce point, la droite cherchée est l'intersection E′E″; cette droite est conjuguée au plan E par rapport aux surfaces S et S′, et par suite par rapport à toutes les surfaces du système.

154. La première relation (148)

$$o = I_{ee'} - \varphi I'_{ee'}$$

nous montre que, *si deux points e, e' sont conjugués aux deux surfaces* S *et* S′, *ils sont aussi conjugués à toutes les surfaces* Φ *qui passent par l'intersection* SS′.

Il résulte de là que, *si les points e, e' sont les points de contact d'un plan tangent aux surfaces* S *et* S′, *ces points sont conjugués à toutes les surfaces qui passent par l'intersection* SS′. Car ces points e, e', étant évidemment conjugués aux surfaces S et S′, seront, d'après le théorème précédent, conjugués à toutes les surfaces qui passent par la courbe SS′.

De même, *si trois surfaces menées par l'intersection SS′ touchent un même plan, les points de contact déterminent un triangle conjugué à toutes les surfaces du système, et si deux surfaces menées par l'intersec-*

tion SS′ *touchent une même droite, les points de contact sont conjugués à toutes les surfaces du système.*

Nous voyons encore que, *si l'on prend les plans polaires d'un même point e par rapport à toutes les surfaces menées par l'intersection* SS′, *ces plans passeront par une droite fixe.* Menons, en effet, la surface Φ du système qui passe au point e, et soit E le plan tangent de Φ en ce point; il y a deux autres surfaces du système qui touchent ce plan E, et si e', e'' sont les points de contact, la droite fixe est $e'e''$. Cette droite $e'e''$ étant en effet conjuguée au point e par rapport à toutes les surfaces du système, les plans polaires du point e passeront tous par cette droite.

Propriétés de trois surfaces inscrites à la même développable.

155. De la relation [(1)′, 144] il résulte que, *quand trois surfaces* S, S′, Φ *sont inscrites à la même développable, si l'on prend deux plans* E, E′ *conjugués à* Φ, *le quotient* $\frac{I_{EE'}}{I'_{EE'}}$ *des indices de ce système de plans, pris par rapport aux surfaces* S *et* S′, *est égal au paramètre* φ *de la surface* Φ.

D'après (52), désignons par a et b les points d'intersection de la surface S avec son diamètre conjugué au plan E, par a' et b' les points d'intersection de la surface S′ avec son diamètre conjugué à ce même plan; on aura

$$\frac{(a,E)(b,E')+(a,E')(b,E)}{\pi^2} : \frac{(a',E)(b',E')+(a',E')(b',E)}{\pi'^2} = \varphi.$$

Si l'on prend le plan E′ à l'infini, le plan E passera

par le centre de Φ, et la relation se réduira à

$$\frac{(a, \mathrm{E}) + (b, \mathrm{E})}{\pi^2} : \frac{(a', \mathrm{E}) + (b', \mathrm{E})}{\pi'^2} = \varphi,$$

ou bien, o et o' étant les centres de S et S',

$$\frac{(o, \mathrm{E})}{\pi^2} : \frac{(o', \mathrm{E})}{\pi'^2} = \varphi.$$

Or cette égalité exige que le centre m de la surface Φ, par lequel est mené le plan arbitraire E, soit situé sur la ligne oo' qui joint les centres des deux premières; ainsi *le lieu du centre des surfaces inscrites à la développable* SS' *est une droite*, et les points o, o', m étant les centres des surfaces S, S', Φ, on a

$$\frac{om}{\pi^2} : \frac{o'm}{\pi'^2} = \varphi.$$

Cette relation donnera immédiatement la valeur du paramètre de la surface Φ, connaissant le centre m de cette surface.

156. Lorsque le plan E' coïncide avec E, on voit que :

Quand trois surfaces S, S', Φ *ont en commun les mêmes plans tangents, si l'on mène à la dernière un plan tangent quelconque* E, *le quotient* $\frac{\mathrm{I_E}}{\mathrm{I'_E}}$ *des indices de ce plan par rapport aux deux autres,* S *et* S', *est égal à une constante* φ.

On obtiendra des corollaires de ce théorème en y remplaçant les indices par leurs valeurs.

(a) Si l'on désigne par F et G deux plans quelconques, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{I_E}}{\mathrm{I_F}} : \frac{\mathrm{I'_E}}{\mathrm{I'_G}} = \varphi \frac{\mathrm{I'_G}}{\mathrm{I_F}},$$

de sorte que, si A, B sont les plans tangents de S menés par l'intersection EF, et A', B' les plans tangents de S' menés par la droite EG, on a (52)

$$\frac{\sin EA \sin EB}{\sin FA \sin FB} : \frac{\sin EA' \sin EB'}{\sin GA' \sin GB'} = \varphi \frac{I'_G}{I_F}.$$

Le premier membre de cette relation sera constant si I_F et I'_G le sont aussi; on pourra donc prendre (54) pour le plan F un plan tangent quelconque d'une homofocale déterminée de S, et pour le plan G un plan tangent aussi quelconque d'une homofocale donnée de S'. Si, en particulier, les plans F et G sont fixes, on a dans l'espace le théorème analogue au théorème général 396 du *Traité des sections coniques* de M. Chasles.

(*b*) Désignons par *e* et *f* les pôles des plans E, F par rapport à S,

$$\frac{I_E}{I} = \frac{(o, E)(e, E)}{(o, F)(f, F)};$$

mais

$$\frac{(o, E)}{(o, F)} = \frac{(f, E)}{(e, F)};$$

par conséquent

$$\frac{I_E}{I_F} = \frac{(e, E)(f, E)}{(e, F)(f, F)} = \frac{(f, E)}{(f, F)} \frac{\sin PE}{\sin PF},$$

en désignant par P le plan passant par le point *e* et l'intersection EF. On a de même

$$\frac{I'_E}{I'_G} = \frac{(g, E)}{(g, G)} \frac{\sin QE}{\sin QG},$$

g étant le pôle du plan G par rapport à S', *e'* le pôle du plan E par rapport à cette même surface, et Q le plan mené par le point *e'* et l'intersection EG. La relation précédente (*a*) donne donc, en supposant fixes les plans F et G,

$$\frac{(f, E) \sin PE}{\sin PF} : \frac{(g, E) \sin QE}{\sin QG} = \text{const.}$$

Appelant T le plan mené par les droites FG et PQ, nous avons

$$\frac{\sin PE . \sin QG . \sin FT}{\sin PF . \sin QE . \sin GT} = 1,$$

de sorte que la relation précédente devient

$$\frac{\sin GT}{\sin FT} \frac{(f, E)}{(g, E)} = \text{const.}$$

Si nous supposons que les points f et g coïncident,

$$\frac{\sin GT}{\sin FT} = \text{const.};$$

dans ce cas le plan T est donc fixe, et l'on a ce théorème :

Trois surfaces S, S′, Φ *ayant en commun les mêmes plans tangents, désignons par* F *et* G *les plans polaires d'un même point par rapport aux surfaces* S *et* S′; *si l'on mène un plan tangent* E *à la surface* Φ, *et que par les droites* EF, EG *on fasse passer les plans* P *et* Q *respectivement conjugués au plan* E *par rapport aux surfaces* S *et* S′, *lorsque le plan* E *roulera sur* Φ, *l'intersection* PQ *décrira un plan passant par la droite* FG.

(c) Si l'on désigne par A et B les plans tangents de S parallèles au plan E, par A′ et B′ les plans tangents de S′ parallèles à ce plan, on a (52)

$$\pi^2 I_E = (E, A)(E, B), \quad \pi'^2 I'_E = (E, A')(E, B'),$$

et, par conséquent,

$$\frac{(E, A)(E, B)}{(E, A')(E, B')} = \text{const.}$$

(d) Désignons par E le produit des demi-axes de la section faite dans S par le plan E, par E_0 le produit des demi-axes de la section diamétrale faite dans la même

surface par un plan parallèle au plan E, on a (52)

$$I_E = -\frac{E}{E_0^3},$$

et, relativement à la surface S',

$$I'_E = -\frac{E'}{E'^3_0},$$

en ajoutant un accent à ce qui est relatif à cette surface.

De là résulte la relation

$$\frac{E}{E_0^3} : \frac{E'}{E'^3_0} = \varphi.$$

A la surface Φ on peut mener deux plans tangents parallèles E et F. Le premier nous a donné la relation précédente; le second, à l'aide d'une notation analogue, donne

$$\frac{F}{E_0^3} : \frac{F'}{E'^3_0} = \varphi.$$

La comparaison de ces égalités montre que

$$\frac{E}{F} = \frac{E'}{F'}.$$

Or les sections E, F de la surface S sont semblables, et de même les sections E', F' de la surface S'. Si p et p' sont les sommets de l'un des deux cônes que l'on peut mener par les sections E, F et E', F', l'égalité ci-dessus montre que

$$\frac{(p, E)^2}{(p, F)^2} = \frac{(p', E)^2}{(p', F)^2};$$

d'où, en prenant le même signe dans les deux membres,

$$\frac{(p, E)}{(p, F)} = \frac{(p', E)}{(p', F)};$$

de là

$$\frac{(p, E)}{(p, E) - (p, F)} = \frac{(p', E)}{(p', E) - (p', F)}.$$

Or les dénominateurs sont égaux comme représentant la distance du plan F au plan E. Il en résulte

$$(p, E) = (p', E);$$

les sommets p et p' sont donc à la même distance du plan E; et si q et q' sont les deux autres sommets des cônes menés par les sections semblables E, F et E′, F′, on aura aussi

$$(q, E) = (q', E),$$

de sorte que les droites pp', qq' sont parallèles aux plans tangents E, F de la surface Φ.

Trois surfaces S, S′, Φ *ayant en commun les mêmes plans tangents, on mène à la troisième deux plans tangents parallèles* E *et* F ; *ces plans coupent chacune des surfaces* S *et* S′ *suivant des coniques par lesquelles on peut faire passer deux cônes. Les sommets de ces quatre cônes déterminent un quadrilatère dont deux côtés sont parallèles aux plans* E *et* F.

(*A suivre.*)

BIBLIOGRAPHIE.

Questions proposées sur les Éléments de Géométrie, divisées en Livres, Chapitres et Paragraphes, et contenant quelques indications *sur la manière de résoudre certaines questions;* Ouvrage destiné aux Élèves des classes de Mathématiques élémentaires, aux Élèves des différentes classes de Lettres et à ceux de l'Enseignement secondaire spécial; par M. *P.-F. Compagnon.* In-8°, avec figures dans le texte; 1877. Prix : 5 fr.

Pour s'assurer que les élèves ont bien compris les *Éléments de Géométrie,* il est bon de leur proposer des

questions sur ce qu'ils ont déjà vu, de constater comment ils les traitent lorsqu'ils sont abandonnés à eux-mêmes, de leur signaler avec soin les fautes qu'ils commettent, de leur montrer comment on passe d'une question particulière à une question plus générale ou à des questions analogues, etc. Telles sont les raisons qui m'ont engagé à réunir dans ce Recueil un certain nombre d'Exercices.

Toutefois, on ne saurait trop recommander aux élèves d'insister avant tout sur les propositions contenues dans le texte des *Éléments* et de ne pas les confondre avec les questions qui s'y rattachent.

J'ai divisé ce Recueil en Livres, Chapitres et Paragraphes, qui se rapportent aux différents Livres, Chapitres et Paragraphes de mes *Éléments de Géométrie*, et, en général, j'ai cherché à ne proposer que des questions connues et peu difficiles, laissant aux professeurs le soin d'en proposer d'autres qui soient plus en rapport avec la force et la capacité de leurs élèves ou avec le but que ces élèves poursuivent.

Je ne pense pas qu'il y ait lieu, comme on le fait ordinairement, de placer des questions à la suite des *Éléments*, ou à en intercaler dans le texte; à mon avis, ces *Éléments* doivent former un Ouvrage classique, bien délimité, que les élèves puissent étudier et comprendre depuis la première ligne jusqu'à la dernière, une sorte de *logique pratique*, très-propre à développer et à fortifier leurs facultés intellectuelles.

Le mieux me semble donc de présenter les *Éléments de Géométrie* dans un Ouvrage à part, sans y proposer aucune question et sans y joindre non plus des notions sur quelques courbes usuelles, sur le levé des plans, sur l'arpentage.

D'ailleurs cette manière de procéder laisse plus de latitude pour le choix des questions et elle permet aussi,

lorsqu'il s'agit de questions un peu difficiles, de mettre les élèves sur la voie, en leur donnant quelques indications sur la marche à suivre, sur les constructions à effectuer, etc.

Remarque. — Ce Recueil contient quelques questions qui sont résolues dans les Notes de mes *Éléments de Géométrie* et j'ai soin de les signaler : ce sont, en général, des questions que les élèves doivent connaître plus particulièrement et je n'ai pas craint de faire ces doubles emplois.

Je terminerai en appelant l'attention des élèves sur les trois Notes qui terminent ces Questions. La première est relative aux *lieux géométriques*, la seconde à *différentes méthodes pour résoudre les problèmes* et la troisième à *quelques indications pour démontrer les théorèmes*. Enfin nous leur recommandons aussi de discuter les problèmes avec soin. Ce genre d'exercices donne de la force et de la rectitude à l'esprit, et s'il paraît d'abord un peu difficile, un peu pénible, il finit souvent par avoir de l'attrait, par procurer une vraie satisfaction en faisant voir les modifications que présente la résolution d'un problème, lorsqu'on fait varier d'une manière continue la figure que l'on considère. COMPAGNON.

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES DANS LES NOUVELLES ANNALES.

Question 1210

(voir 2e série, t. XV, p. 240);

PAR M. CH. BRUNOT,
Élève en Mathématiques spéciales au lycée de Dijon.

Trouver l'enveloppe d'une sphère qui coupe orthogonalement une sphère fixe donnée et qui demeure

tangente à un système de trois diamètres conjugués d'une surface à centre du second degré également donnée. (V. Hioux.)

Soient

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2=\text{R}^2$$

les équations de la sphère et de l'ellipsoïde donnés; soit

$$(\text{X}-\alpha)^2+(\text{Y}-\beta)^2+(\text{Z}-\gamma)^2=\rho^2$$

l'équation de la sphère variable; soient enfin

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'},$$

$$\frac{x}{x''}=\frac{y}{y''}=\frac{z}{z''},$$

$$\frac{x}{x'''}=\frac{y}{y'''}=\frac{z}{z'''}$$

les équations de trois diamètres quelconques.

Si l'on pose

$$\frac{x'}{a}=\cos\lambda',\quad \frac{y'}{b}=\cos\mu',\quad \frac{z'}{c}=\cos\nu',$$

$$\frac{x''}{a}=\cos\lambda'',\quad \frac{y''}{b}=\cos\mu'',\quad \frac{z''}{c}=\cos\nu'',$$

$$\frac{x'''}{a}=\cos\lambda''',\quad \frac{y'''}{b}=\cos\mu''',\quad \frac{z'''}{c}=\cos\nu''',$$

la condition pour que le premier diamètre soit tangent à la sphère mobile est

$$(\alpha x'+\beta y'+\gamma z')^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\rho^2)(x'^2+y'^2+z'^2)$$

ou

$$(a\alpha\cos\lambda'+b\beta\cos\mu'+c\gamma\cos\nu')^2$$
$$=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\rho^2)(a^2\cos^2\lambda'+b^2\cos^2\mu'+c^2\cos^2\nu').$$

Faisons la somme de cette équation et des deux autres analogues, et observons que, lorsque trois diamètres sont conjugués, les trois directions (λ', μ', ν'), $(\lambda'', \mu'', \nu'')$, $(\lambda''', \mu''', \nu''')$ sont rectangulaires; il vient

$$a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \rho^2)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Éliminant ensuite ρ^2 entre cette équation et la suivante :

$$(\alpha - x_1)^2 + (\beta - y_1)^2 + (\gamma - z_1)^2 = R^2 + \rho^2,$$

qui exprime que les deux sphères se coupent orthogonalement, on en conclut que le centre de la sphère mobile décrit une surface du second ordre. L'enveloppe cherchée est donc une surface anallagmatique du quatrième ordre, conformément à la définition donnée par M. Moutard.

Question 1242

(voir 2ᵉ série, t. XVI, p. 288);

PAR M. F. PISANI,
Professeur à Girgenti.

On donne, dans un plan, un triangle, une conique circonscrite et une droite quelconque. On prend le milieu (toujours réel) de la droite considérée comme corde de la conique, et les symétriques, par rapport à ce milieu, des trois points où la droite rencontre les côtés du triangle. Démontrer que les trois droites obtenues en joignant ces symétriques aux sommets opposés du triangle vont concourir sur la conique.

(J.-J.-A. MATHIEU.)

Soient ABC un triangle inscrit dans une conique; P, Q, R les points d'intersection de la transversale u avec les côtés BC, CA, AB; M, M′ les points d'intersection de la même droite avec la courbe; O le milieu de la corde MM′.

Prenons $OP' = OP$, la droite AP' rencontre la courbe au point A'. Menons les droites $A'B$, $A'C$ qui vont couper la transversale aux points Q', R'.

$ABCA'$ étant un quadrilatère inscrit dans une conique, la transversale u coupe les couples de côtés opposés et la courbe en couples de points en involution

$$(P, P'), (Q, Q'), (R, R'), (M, M');$$

mais le point O est le milieu des deux segments PP', MM' déterminés par deux couples de points conjugués; donc O sera de même le milieu des autres segments QQ', RR', c'est-à-dire que les points P', Q', R' sont symétriques des points P, Q, R par rapport au point O, milieu de la corde MM'. Donc AP', BQ', CR' sont trois droites concourant au point A' situé sur la conique.

On peut aisément démontrer le théorème corrélatif:

On donne, dans un plan, un triangle, une conique inscrite et un point quelconque. On prend la bissectrice (toujours réelle) de l'angle des tangentes issues de ce point, et, par rapport à cette bissectrice, les droites symétriques des trois rayons qui projettent les trois sommets du triangle : ces trois droites rencontrent les côtés opposés du triangle en trois points situés sur une même tangente à la conique.

Soient abc un triangle circonscrit à une conique; p, q, r les rayons qui joignent le point U aux sommets (bc), (ca), (ab); m, m' les tangentes issues de U à la courbe; o la bissectrice de l'angle des tangentes m, m'.

Faisons l'angle $oUp' = oUp$, et, par le point (ap'), menons la tangente a'. Projetons enfin du point U les points $(a'q)$, $(a'r)$ par les droites q', r'.

$abca'$ étant un quadrilatère circonscrit à la conique,

les couples de droites menées de U aux sommets et les deux tangentes forment un faisceau en involution

$$pp',\ qq',\ rr',\ mm';$$

mais la droite o est la bissectrice des deux angles $p\mathrm{U}p'$, $m\mathrm{U}m'$, déterminés par deux couples de rayons conjugués : donc o sera de même bissectrice des angles $q\mathrm{U}q'$, $r\mathrm{U}r'$, c'est-à-dire que les rayons p', q', r' sont symétriques par rapport à la droite o qui est la bissectrice de l'angle des tangentes m, m'. Donc les points d'intersection de p', q', r', avec les côtés a, b, c du triangle abc, sont situés sur une même tangente à la courbe.

Note. — Solutions analogues par MM. A. Bertrand, propriétaire à Azillanet (Hérault); Moret-Blanc; L. Bertaux, élève de l'Athénée de Mons. Solutions analytiques, par MM. H. Lez; A. Vénard, élève du lycée de Clermont-Ferrand; V. Jamet, professeur au lycée de Saint-Brieuc; Numa Para, élève du lycée de Bordeaux.

Question 1244

(voir 2e série, t. XVI, p. 335);

PAR M. J. LAPIERRE,
Élève du lycée de Bordeaux.

Soient m, n, p les bissectrices des angles d'un triangle, opposés aux côtés a, b, c; démontrer que

$$c\left(np\cos\frac{A}{2} + mp\cos\frac{B}{2} - mn\cos\frac{C}{2}\right)$$
$$= b\left(np\cos\frac{A}{2} + mn\cos\frac{C}{2} - mp\cos\frac{B}{2}\right)$$
$$= a\left(mp\cos\frac{B}{2} + mn\cos\frac{C}{2} - np\cos\frac{A}{2}\right) = mnp.$$

(LEZ.)

On a

$$m = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}, \quad n = \frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}, \quad p = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}.$$

Si, entre ces trois équations, j'élimine a, b, j'aurai une relation entre m, n, p et les angles du triangle, qui, simplifiée, donnera l'expression cherchée.

Des deux premières équations je tire

$$b = \frac{mc}{2c\cos\frac{A}{2} - m}, \quad a = \frac{nc}{2c\cos\frac{B}{2} - m},$$

d'où

$$ab = \frac{mnc^2}{\left(2c\cos\frac{A}{2} - m\right)\left(2c\cos\frac{B}{2} - m\right)},$$

$$a + b = \frac{mc\left(2c\cos\frac{B}{2} - m\right) + nc\left(2c\cos\frac{A}{2} - m\right)}{\left(2c\cos\frac{A}{2} - m\right)\left(2c\cos\frac{B}{2} - m\right)}.$$

Je porte ces valeurs dans la troisième équation : il vient

$$mp\left(2c\cos\frac{B}{2} - m\right) + np\left(2c\cos\frac{A}{2} - m\right) = 2mnc\cos\frac{C}{2};$$

d'où la relation demandée

$$c\left(np\cos\frac{A}{2} + mp\cos\frac{B}{2} - mn\cos\frac{C}{2}\right) = mnp.$$

En éliminant de même a et c, on aura la deuxième relation ; de même pour la troisième.

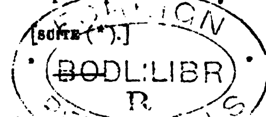
Note. — Solutions analogues par MM. J. Chambon, élève du lycée de Bordeaux ; Moret-Blanc ; Ferd. Pisani ; A. Genouille, professeur au lycée de Tournon ; P. Sondat.

MÉMOIRE SUR LES TRANSFORMATIONS DU SECOND ORDRE DANS LES FIGURES PLANES;

Par M. E. AMIGUES,

Professeur de Mathématiques ~~spéciales au~~ lycée de Nice.

[Suite (*).]



21. Puisqu'une droite correspond à une droite, il est naturel d'étudier les systèmes où les droites de l'infini se correspondent.

Dans la figure ABC, la droite de l'infini a pour équation

$$X \sin A + Y \sin B + Z \sin C = 0.$$

Représentons la droite correspondante de l'autre figure par l'équation

$$(18) \qquad P'X' + Q'Y' + R'Z' = 0.$$

Les quantités P', Q', R' sont définies par les relations

$$\lambda P' \sin A = \mu Q' \sin B = \nu R' \sin C.$$

L'équation (18) devient donc

$$(19) \qquad \frac{X'}{\lambda \sin A} + \frac{Y'}{\mu \sin B} + \frac{Z'}{\nu \sin C} = 0.$$

Cette équation doit être identique avec la suivante :

$$(20) \qquad X' \sin A' + Y' \sin B' + Z' \sin C' = 0.$$

Identifiant les équations (19) et (20), on trouve pour conditions

$$(21) \qquad \lambda \sin A \sin A' = \mu \sin B \sin B' = \nu \sin C \sin C';$$

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XVI, p. 422, 451, 496.

ces équations (21) expriment que les droites de l'infini se correspondent.

Cherchons leur interprétation géométrique; on voit facilement que la droite

$$(22) \qquad PX + QY + RZ = 0$$

coupe le côté BC du triangle ABC en un point α, tel que

$$(23) \qquad \frac{\alpha C}{\alpha B} = -\frac{R}{Q}\frac{\sin B}{\sin C}.$$

De même la droite correspondante

$$(24) \qquad P'X' + Q'Y' + R'Z' = 0$$

coupe le côté B'C' du triangle A'B'C' en un point α', tel que

$$(25) \qquad \frac{\alpha' C'}{\alpha' B'} = -\frac{R'}{Q'}\frac{\sin B'}{\sin C'};$$

multipliant (23) par (25),

$$\frac{\alpha C}{\alpha B}\frac{\alpha' C'}{\alpha' B'} = \frac{RR'}{QQ'}\frac{\sin B \sin B'}{\sin C \sin C'},$$

ou bien, à cause des relations $\lambda PP' = \mu QQ' = \nu RR'$,

$$(26) \qquad \frac{\alpha C}{\alpha B}\frac{\alpha' C'}{\alpha' B'} = \frac{\mu \sin B \sin B'}{\nu \sin C \sin C'}.$$

La relation (26) est vraie dans tous les systèmes; mais, dans les systèmes où les droites de l'infini se correspondent, la relation (26), d'après les équations (21), prend une forme plus simple qui est

$$(27) \qquad \frac{\alpha C}{\alpha B}\frac{\alpha' C'}{\alpha' B'} = 1.$$

La relation (27) et les analogues équivalent aux relations (21). Elles signifient que les rapports dans lesquels

les droites correspondantes divisent les côtés de même nom dans les triangles de référence sont réciproques.

Les relations (21) laissent les deux triangles absolument arbitraires et ne déterminent que λ, μ et ν.

Si, en particulier, les deux triangles sont égaux et confondus, les points α et α' sont évidemment symétriques par rapport au milieu de BC. On obtient ainsi un mode de transformation imaginé *a priori* par M. Gohierre de Longchamps (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. III). Le procédé de M. Gohierre de Longchamps offre cet avantage que les deux figures homographiques signalées au n° 19 sont semblables. Mais cet avantage n'appartient pas exclusivement à ce procédé : nous avons rencontré incidemment plusieurs procédés simples ayant le même caractère. C'est ce qui nous a décidé à entreprendre la recherche analytique de tous les systèmes de transformation doués de cette propriété. Nous exposerons plus loin le résultat de cette recherche.

22. Pour le moment, nous allons étudier les propriétés générales des systèmes où les droites de l'infini se correspondent.

On a vu que les points de la figure ABC qui se transforment en paraboles dans la figure A'B'C' sont situés sur une droite que nous avons appelée pour ce motif *droite parabolique* et dont l'équation est

$$\frac{X}{\lambda \sin A'} + \frac{Y}{\mu \sin B'} + \frac{Z}{\nu \sin C'} = 0.$$

Dans les systèmes caractérisés par les conditions (21), l'équation précédente devient

$$x \sin A + Y \sin B + Z \sin C = 0,$$

c'est à-dire que dans chacune des deux figures la droite parabolique n'est autre que la droite de l'infini.

Ainsi, dans les systèmes où les droites de l'infini se correspondent, ce sont les points de la droite de l'infini de chaque figure qui se transforment en paraboles dans l'autre figure.

Dans ces mêmes systèmes les points pris sur la droite de l'infini donnent dans l'autre figure des paraboles, c'est-à-dire des coniques dont les centres sont sur la droite de l'infini de cette seconde figure. Ainsi les droites de l'infini se correspondent également dans les deux figures homographiques signalées au n° 19, de façon que *des droites parallèles ont pour homographiques des droites parallèles*.

Mais une propriété plus remarquable des systèmes caractérisés par les équations (21) consiste en ce fait que les figures homographiques signalées au n° 19 ont des aires proportionnelles.

Pour démontrer ce fait, remontons à l'équation (14), savoir :

$$X' = \frac{R'\left(\frac{Z}{\nu}\sin B' + \frac{Y}{\mu}\sin C'\right)}{\frac{X}{\lambda\sin A'} + \frac{Y}{\mu\sin B'} + \frac{Z}{\nu\sin C'}}.$$

Puisque dans les systèmes actuels on a

$$\lambda\sin A\sin A' = \mu\sin B\sin B' = \nu\sin C\sin C',$$

on peut poser

$$\lambda\sin A\sin A' = \mu\sin B\sin B' = \nu\sin C\sin C' = K;$$

d'où l'on déduit

$$X\sin A + Y\sin B + Z\sin C$$
$$= K\left(\frac{X}{\lambda\sin A'} + \frac{Y}{\mu\sin B'} + \frac{Z}{\nu\sin C'}\right).$$

La valeur de X′ s'écrit donc

$$X' = \frac{R'\left(\frac{Z}{\nu}\sin B' + \frac{Y}{\mu}\sin C'\right)}{\frac{1}{K}(X\sin A + Y\sin B + Z\sin C)},$$

ou bien encore, en désignant par S l'aire du triangle ABC et par R le rayon du cercle circonscrit à ce triangle,

$$(28) \qquad X' = \frac{KRR'}{S}\left(\frac{Z}{\nu}\sin B' + \frac{Y}{\mu}\sin C'\right).$$

Si, dans cette formule et les analogues, on remplace X, Y, Z, X′, Y′, Z′ en fonction des coordonnées cartésiennes x, y, x', y', et si l'on résout deux de ces trois équations en x' et y', on obtient

$$x' = ax + by + c,$$
$$y' = a'x + b'y + c'.$$

D'après la forme de ces deux relations, les aires correspondantes sont proportionnelles dans les figures homographiques, et le rapport des aires a pour valeur

$$\pm \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

C'est ce que nous avons établi dans un autre travail ([1]).

Au lieu de calculer la valeur de ce déterminant, il est plus simple de calculer en coordonnées trilatères le rapport de deux triangles correspondants.

Soit Σ l'aire d'un triangle quelconque dans la figure ABC, Σ′ l'aire du triangle homographique dans la figure A′B′C′.

(*) *Relation entre les volumes correspondants de certaines figures homographiques* (*Nouvelles Annales de Mathématiques ;* 1873).

On a la formule

$$\Sigma' = \pm \frac{R'}{2S'} \begin{vmatrix} X'_1 & Y'_1 & Z'_1 \\ X'_2 & Y'_2 & Z'_2 \\ X'_3 & Y'_3 & Z'_3 \end{vmatrix}.$$

Remplaçant les coordonnées du second membre par leurs valeurs tirées de la formule (28) et des formules analogues, on a

$$\Sigma' = \pm \frac{K^2R^2R''}{2S^3S'} \begin{vmatrix} \frac{Y_1}{\mu}\sin C' + \frac{Z_1}{\nu}\sin B' & \frac{Z_1}{\nu}\sin A' + \frac{X_1}{\lambda}\sin C' & \frac{X_1}{\lambda}\sin B' + \frac{Y_1}{\mu}\sin A' \\ \frac{Y_2}{\mu}\sin C' + \frac{Z_2}{\nu}\sin B' & \frac{Z_2}{\nu}\sin A' + \frac{X_2}{\lambda}\sin C' & \frac{X_2}{\lambda}\sin B' + \frac{Y_2}{\mu}\sin A' \\ \frac{Y_3}{\mu}\sin C' + \frac{Z_3}{\nu}\sin B' & \frac{Z_3}{\nu}\sin A' + \frac{X_3}{\lambda}\sin C' & \frac{X_3}{\lambda}\sin B' + \frac{Y_3}{\mu}\sin A' \end{vmatrix},$$

ou bien

$$\Sigma' = \pm \frac{K^3R^3R'^4}{2S^3S'} \frac{\sin A' \sin B' \sin C'}{\lambda\mu\nu} 2 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

$$\Sigma' = \frac{K^3R^3R'^4}{2S^3S'} \frac{\sin A' \sin B' \sin C'}{\lambda\mu\nu} 2 \frac{2S}{R} \Sigma,$$

$$\Sigma' = \Sigma \frac{K^3R^2R'^2}{S^2\lambda\mu\nu}.$$

On a d'ailleurs

$$\lambda = \frac{K}{\sin A \sin A'}, \quad \mu = \frac{K}{\sin B \sin B'}, \quad \nu = \frac{K}{\sin C \sin C'};$$

on peut donc écrire

$$\Sigma' = \Sigma \frac{R^2R'^2 \sin A \sin B \sin C \sin A' \sin B' \sin C'}{S^2},$$

$$\frac{\Sigma'}{\Sigma} = \frac{1}{4}\frac{S'}{S}.$$

Si $S' = 4S$, les figures homographiques ont des aires équivalentes.

23. Dans la figure ABC, un point M est défini par deux de ses coordonnées Y et Z. De même, dans la figure A′B′C′, un point M′ est défini par deux de ses coordonnées Y′ et Z′. Cherchons les deux relations qui expriment que les points M et M′ décrivent des courbes semblables.

Soient $O'(Y'_0, Z'_0)$ le point correspondant de A, O′R la direction qui correspond à AC, faisant un angle β avec A′C, h le rapport de similitude.

Soient

$$MAC = M'O'R = \alpha \quad \text{et} \quad AM = \rho;$$

alors

$$O'M' = h\rho.$$

On a les équations

$$Y = \rho \sin\alpha,$$
$$Z = \rho \sin(A - \alpha),$$

et aussi les suivantes :

$$Y' = Y'_0 + h\rho \sin(\alpha + \beta),$$
$$Z' = Z'_0 + h\rho \sin(A' - \alpha - \beta).$$

Éliminant α et ρ entre ces quatre relations, on obtient

(29) $(Y' - Y'_0)\sin A = hY\sin(A + \beta) + hZ\sin\beta,$

(30) $(Z' - Z'_0)\sin A = hY\sin(A' - A - \beta) + hZ\sin(A' - \beta).$

Ces formules expriment que les points M et M′ décrivent des courbes semblables.

24. Si, dans les formules (29) et (30), on porte les valeurs de Y′ et Z′ tirées des deux formules analogues à la formule (14), et si, dans les deux formules nouvelles ainsi obtenues, on remplace X en fonction de Y et de Z, on a les deux identités en Y et Z, qui expriment que les deux figures homographiques du n° 19 sont semblables. Ces identités se décomposent en équations, et ces équa-

tions servent : 1° à calculer Y'_0, Z'_0, β, h; 2° à définir les systèmes où les figures homographiques en question sont semblables.

Nous avons fait ce calcul. Sans être bien élégant, il n'a rien de trop pénible; mais il vaut mieux le simplifier par des considérations géométriques.

25. Nous avons vu que, dans les systèmes où les droites de l'infini se correspondent par transformation du second ordre, les droites parallèles de l'une des figures homographiques correspondent à des droites parallèles de l'autre. La réciproque est vraie; car, si cette dernière condition est remplie, les droites de l'infini se correspondent dans les figures homographiques; donc la droite parabolique de chaque figure est confondue avec la droite de l'infini de la même figure; donc on a

$$\lambda \sin A \sin A' = \mu \sin B \sin B' = \nu \sin C \sin C';$$

donc enfin les droites de l'infini se correspondent dans la transformation du second ordre.

Si, en particulier, on considère les systèmes où les figures homographiques du n° 19 sont semblables, il est clair que les angles homologues sont égaux et qu'en particulier les angles nuls ont pour homologues des angles nuls; en d'autres termes, les lignes parallèles ont pour homologues des lignes parallèles. On est donc nécessairement dans un de ces systèmes où les droites de l'infini se correspondent par transformation du second ordre, systèmes caractérisés par les conditions

$$\lambda \sin A \sin A' = \mu \sin B \sin B' = \nu \sin C \sin C'.$$

C'est donc parmi ces derniers systèmes exclusivement qu'il faut chercher des figures homographiques semblables.

On arrive d'ailleurs à cette conclusion en faisant le calcul indiqué au nº 24.

26. Mais il vaut mieux prendre cette conclusion comme point de départ, pour simplifier ce calcul. Cette simplification consiste en ceci, qu'au lieu de porter dans les formules (29) et (30) les valeurs générales de Y′ et Z′ fournies par les formules analogues à la formule (14), on y portera les valeurs de Y′ et Z′ fournies par les formules analogues à la formule (28).

D'après cette formule (28), on a

$$Y' = \frac{KRR'}{S}\left(\frac{Z}{\nu}\sin A' + \frac{X}{\lambda}\sin C'\right),$$

ou bien, en remplaçant λ et ν par leurs valeurs,

$$Y' = \frac{RR'\sin A'\sin C'}{S}(Z\sin C + X\sin A).$$

Dans cette formule, remplaçons X par sa valeur tirée de la relation générale

$$X\sin A + Y\sin B + Z\sin C = \frac{S}{R};$$

nous aurons

$$Y' = R'\sin A'\sin C' - \frac{RR'\sin A'\sin C'}{S} Y\sin B.$$

Enfin, remplaçant S par sa valeur en fonction de R, A, B, C,

$$(31)\qquad Y' = R'\sin A'\sin C' - \frac{R'}{2R}\frac{\sin A'\sin C'}{\sin A\sin C}Y,$$

on a, par analogie,

$$(32)\qquad Z' = R'\sin A'\sin B' - \frac{R'}{2R}\frac{\sin A'\sin B'}{\sin A\sin B}Z.$$

Portant ces valeurs (31) et (32) dans les relations (29)

et (30), et exprimant que celles-ci deviennent alors des identités en Y et Z, on obtient les six équations suivantes :

$$\begin{aligned}
Y'_0 &= R' \sin A' \sin C',\\
Z'_0 &= R' \sin A' \sin B',\\
\sin\beta &= 0,\\
\sin(A' - A - \beta) &= 0,\\
h \sin(A + \beta) &= -\frac{R'}{2R}\,\frac{\sin A' \sin C'}{\sin C},\\
h \sin(A' - \beta) &= -\frac{R'}{2R}\,\frac{\sin A' \sin B'}{\sin B}.
\end{aligned}$$

Ce système est facile à résoudre ; il donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
\beta &= \pi,\\
A' &= A,\\
B' &= B,\\
C' &= C,\\
h &= \frac{R'}{2R},\\
Y'_0 &= R' \sin A' \sin C',\\
Z'_0 &= R' \sin A' \sin B'.
\end{aligned}$$

Il semble que nous ayons ici une équation de plus ; mais il faut remarquer que les trois équations

$$A' = A, \quad B' = B, \quad C' = C$$

ne sont pas distinctes.

En résumé, pour que les figures homographiques soient semblables, il faut et il suffit : 1° que les droites de l'infini se correspondent dans la transformation du second ordre ; 2° que les deux triangles de référence soient semblables.

Ces conditions étant remplies, on trouve les valeurs

de β, h, Y'_0 et Z'_0. Faisons quelques remarques sur ces valeurs.

Le rapport de similitude h n'est pas égal à celui des triangles de référence, mais seulement à sa moitié. Pour avoir des figures homographiques égales, il faudrait donc prendre $R' = 2R$.

Cherchons la position du point O' qui correspond au point A. Les valeurs de Y'_0 et Z'_0 satisfont évidemment à la relation suivante :

$$Y'_0 \sin B' = Z'_0 \sin C',$$

ce qui prouve que le point O' est sur la médiane qui va du point A' au milieu du côté B'C'. Pour achever de déterminer le point O', calculons X'_0 par la relation générale

$$X'_0 \sin A' + Y'_0 \sin B' + Z'_0 \sin C' = 2R' \sin A' \sin B' \sin C'.$$

Cette relation, combinée avec les valeurs de Y'_0 et X'_0, donne $X'_0 = 0$. Ainsi le point O' est sur B'C'; donc le point correspondant de A est le milieu de B'C'.

Par analogie, celui de B est le milieu de A'C' et celui de C est le milieu de A'B'.

Quand les deux triangles sont dans un même plan et qu'ils ont leurs côtés de même nom parallèles, les deux figures sont homothétiques, et le centre commun d'homothétie se trouve sur les droites qui joignent les points correspondants. Par exemple, dans le procédé de M. Gohierre de Longchamps, les deux triangles sont confondus; au sommet A correspond le milieu de BC : donc le centre d'homothétie est sur la médiane correspondante. Il est de même sur les autres; donc il est au centre de gravité du triangle : c'est en effet le résultat obtenu par M. Gohierre de Longchamps.

27. Que l'on imagine maintenant un procédé quel-

conque de transformation. La première chose à faire sera de le classer dans une des catégories que nous avons obtenues. Les lois de la transformation seront par là même connues avec précision. Prenons un exemple.

Soit un angle yox. Une droite de la figure F coupe les côtés ox et oy en P et Q. On déplace P dans le sens ox d'une longueur $PP' = \alpha$ et Q dans le sens oy d'une longueur $QQ' = \beta$. On a ainsi la droite correspondante P'Q' de la figure F'. Pour passer de la figure F' à la figure F, on doit nécessairement déplacer de la même longueur et en sens inverse. On voit en passant que ce mode de transformation se prête aisément au calcul.

Mettons au point O les lettres C et C'. Prenons $OA' = \alpha$ dans le sens ox, $OA = \alpha$ en sens inverse, $OB' = \beta$ dans le sens oy, et $OB = \beta$ en sens inverse. Aux droites de la figure F, passant respectivement par A, B, C, correspondent dans la figure F' les droites B'C', A'C', A'B'. Inversement aux droites de la figure F', passant par A', B', C', correspondent dans la figure F les droites BC, AC, AB. Par conséquent, ABC est le triangle de référence dans la figure F, et A'B'C' dans la figure F'. Ces triangles sont égaux.

D'ailleurs, il est évident que les droites de l'infini se correspondent, ce qui prouve incidemment que les droites correspondantes coupent les côtés correspondants des triangles dans des rapports réciproques, chose facile à vérifier.

Il est maintenant visible que, si un point décrit une courbe dans la figure ABC, le centre de la conique correspondante décrit dans la figure A'B'C' une conique homothétique deux fois plus petite.

Le centre d'homothétie est le point de concours des droites obtenues en joignant le point A au milieu de B'C', le point B au milieu de A'C', le point C au milieu

de A′B′. Il est visible que ce point de concours est le sommet R du parallélogramme obtenu en menant par A′ une parallèle à oy, et par B′ une parallèle à ox.

On voit que l'homothétie est directe, parce que les côtés de même nom des triangles de référence sont parallèles et de sens contraires.

Tous ces résultats s'établissent sans peine, indépendamment de nos théories générales. Il n'y a qu'à considérer la conique qui correspond à un point et à chercher les tangentes de cette conique qui sont parallèles à ox et à oy.

THÉORIE DES INDICES;

Par M. FAURE,
Chef d'escadrons d'Artillerie.

[SUITE (*).]

Propriétés de trois surfaces qui passent par les mêmes points.

157. De la relation (1)′ (**148**) nous déduisons ce théorème :

Lorsque trois surfaces S, S′, Φ *ont la même intersection, si l'on prend deux points* e, e' *conjugués à* Φ, *le quotient* $\frac{I_{ee'}}{I'_{ee'}}$ *des indices de ce système de points, par rapport aux deux autres* S *et* S′, *est égal au paramètre* φ *de la surface* Φ.

Nous aurons des corollaires de ce théorème en rem-

(*) *Nouvelles Annales*, 2e série, t. XV, p. 251, 292, 339, 451, 81, 529, et t. XVI, p. 5, 160, 193, 249, 289, 508.

plaçant les indices par leurs valeurs. Désignons par a et b, a' et b' les traces de la droite ee' sur les surfaces S et S' respectivement, par ε_0 et ε'_0, les demi-diamètres de ces surfaces parallèles à ee', on a (46)

$$\frac{ea.e'b + eb.e'a}{\varepsilon_0^2} : \frac{ea'.e'b' + eb'.e'a'}{\varepsilon_0'^2} = \varphi.$$

Si dans cette relation e est le centre de Φ, e' est à l'infini, de sorte que

$$\frac{ea + eb}{\varepsilon_0^2} : \frac{ea' + eb'}{\varepsilon_0'^2} = \varphi.$$

158. Si le point e' coïncide avec e, on a cet énoncé :

Lorsque trois surfaces S, S', Φ *ont la même intersection, si l'on prend sur la dernière un point* e, *le quotient* $\frac{I_e}{I'_e}$ *des indices de ce point, par rapport aux deux autres* S *et* S', *est égal au paramètre* φ *de la surface* Φ.

Remplaçons les indices par leurs valeurs.

(a) Soient E, E' les plans polaires du point e par rapport aux surfaces S et S'; menons les diamètres oe, $o'e$ de ces surfaces, lesquels coupent respectivement aux points p et p' les plans E et E'.

D'après la définition,

$$I_e = -\frac{ep}{op}, \quad I'_e = -\frac{ep'}{op'},$$

de sorte que

$$\frac{ep}{op} : \frac{ep'}{o'p'} = \varphi.$$

Ce résultat peut s'interpréter géométriquement.

Menons la droite pp' qui vient couper en q la ligne des centres oo'. Le triangle eoo', coupé par la transver-

sale $pp'q$, donne

$$\frac{ep.o'p'.oq}{op.ep'.o'q} = 1;$$

d'où, à cause de la relation précédente,

$$\frac{o'q}{oq} = \varphi,$$

ce qui prouve que le point q est fixe. Si nous disons que les points p, p' sont les points *réciproques* du point e par rapport aux surfaces S, S', on aura ce théorème :

Lorsque trois surfaces du second degré ont en commun les mêmes points, si l'on prend les points réciproques de chaque point de l'une par rapport aux deux autres, la droite qui joindra ces deux points passera par un point fixe.

b) Par le point e menons une transversale μ coupant la surface S aux points a et b, et une autre transversale μ' coupant la surface S' aux points a' et b'. Si μ_0 et μ'_0 sont les demi-diamètres de S et S' parallèles à ces transversales,

$$I_e = \frac{ea.eb}{\overline{\mu}_0^2}, \quad I'_e = \frac{ea'.eb'}{\overline{\mu}_0'^2},$$

par conséquent,

$$\frac{ea.eb}{\mu_0^2} : \frac{ea'.eb'}{\mu_0'^2} = \varphi.$$

(c) Soient f un point pris sur la transversale μ, g un point pris sur la transversale μ', on peut écrire

$$\frac{I_e}{I_f} : \frac{I'_e}{I'_g} = \varphi \frac{I'_g}{I_f}$$

ou bien

$$\frac{ea.eb}{fa.fb} : \frac{ea'.eb'}{ga'.gb'} = \varphi \frac{I'_g}{I_f}.$$

Le premier membre de cette relation sera constant si

les indices I_f, I'_g sont eux-mêmes constants. Or I_f est constant si le point f est pris sur une surface concentrique et homothétique à S; I'_g est constant si le point g est pris sur une surface concentrique et homothétique à S'. On pourra donc prendre les points f et g où l'on voudra sur l'une et l'autre de ces surfaces respectivement. Lorsque, en particulier, les points f et g sont fixes, on obtient le théorème général 386 du *Traité des sections coniques* de M. Chasles appliqué aux surfaces.

On peut, de la relation établie plus haut, déduire plusieurs conséquences. Supposons, en premier lieu, que le point g coïncide avec le point f et que ce point f soit pris sur une surface Φ' qui passe par les points communs aux surfaces S, S', Φ; le rapport $\frac{I_f}{I'_f}$ est alors égal au paramètre φ' de la surface Φ', et nous avons

$$\frac{ea.eb}{fa.fb}:\frac{ea'.eb'}{fa'.fb'}=\frac{\varphi}{\varphi'}.$$

Si le point f est pris comme le point e sur la surface Φ, $\varphi=\varphi'$, et l'on a

$$\frac{ea.eb}{fa.fb}:\frac{ea'.eb'}{fa'.fb'}=1,$$

relation d'involution entre les trois couples de points e, f, a, b et a', b'. Ainsi, *quand trois surfaces passent par les mêmes points, une transversale les rencontre en six points qui sont en involution.*

Si la transversale touche une des surfaces, son point de contact est un des points doubles de l'involution déterminée par les quatre points d'intersection des deux autres surfaces avec la tangente. Si la transversale touche deux surfaces, les points de contact sont conjugués harmoniques par rapport aux deux points d'intersection de la troisième surface avec la tangente.

De la relation (b) il résulte que, si les transversales μ, μ' restent parallèles à elles-mêmes,

$$\frac{ea.eb}{ea'.eb'} = \text{const.},$$

a et b, a' et b' étant les points d'intersection de μ et μ' avec les surfaces S et S', e l'un des points de la surface Φ.

Si l'on prend pour S une sphère et pour S' les plans des sections circulaires suivant lesquelles la sphère est supposée couper la sphère Φ, cette relation montre que, *quand une sphère* S *a un double contact avec une surface* Φ, *le carré de la tangente menée d'un point de* Φ *à la sphère et le produit des distances du même point aux plans des deux sections circulaires sont en raison constante.*

Supposons que la surface Φ enveloppe la surface S et prenons pour S' le plan de contact. Menons un plan M parallèle aux sections circulaires de S; ce plan coupe Φ suivant une conique, S suivant un cercle ayant un double contact avec la conique, et le plan de contact suivant une droite ε. Pour tout point e de la conique, on aura donc

$$\frac{ea}{(e, \varepsilon)} = \text{const.},$$

ea étant la tangente menée du point e au cercle, (e, ε) la distance du point e à la droite ε. De là :

Si une surface Φ *en enveloppe une autre* S, *tout plan cyclique de* S *coupe* Φ *suivant une conique qui a pour cercle focal le cercle suivant lequel le plan coupe* S, *et si le plan touche la surface* S *en un ombilic, ce point sera le foyer de la conique.*

159. On a vu (150) qu'entre les indices d'un point e pris par rapport à trois surfaces S, S', S'', ayant la

même courbe d'intersection, il existait la relation

$$I''_e = \lambda I_e + \lambda' I'_e.$$

Par le point e menons une transversale rencontrant nos trois surfaces aux points a et b, a' et b', a'' et b'', et appelons ε_0, ε'_0, ε''_0 leurs demi-diamètres parallèles à la transversale, on aura

$$\frac{ea''.eb''}{\varepsilon''^2_0} = \lambda\frac{ea.eb}{\varepsilon^2_0} + \lambda'\frac{ea'.eb'}{\varepsilon'^2_0},$$

et, si le point e est à l'infini,

$$\frac{1}{\varepsilon''^2_0} = \frac{\lambda}{\varepsilon^2_0} + \frac{\lambda'}{\varepsilon'^2_0}.$$

Ainsi, *lorsque trois surfaces ont les mêmes points d'intersection, si l'on mène dans chacune d'elles un diamètre parallèle à une direction arbitraire, il existera une relation linéaire entre les carrés des valeurs inverses de ces trois diamètres.*

Si cette direction arbitraire est parallèle à l'une des génératrices du cône asymptote de la surface S″, le diamètre ε''_0 est infini, de sorte que la relation ci-dessus donne

$$\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon'_0} = \text{const.}$$

Par conséquent, *lorsque trois surfaces* S, S′, S″ *ont la même courbe d'intersection, si par les centres des deux premières* S *et* S′, *on mène des cônes parallèles au cône asymptote de la troisième* S″, *ces cônes couperont les surfaces* S *et* S′ *suivant des courbes homothétiques.*

Au lieu du cône asymptote de S″, on peut prendre l'un de ceux que l'on peut mener par l'intersection SS′.

Propriétés de cinq surfaces inscrites à la même développable.

160. Lorsque le point e' coïncide avec le point e, la relation [(3)' 144] devient

$$o = \frac{I_e}{\pi^4} - \frac{M'}{\pi^4}\varphi + \frac{M}{\pi'^4}\varphi^2 - \frac{I'_e}{\pi'^4}\varphi^3,$$

en posant

$$M' = I_e \sum \frac{I'_A}{I_A} + \frac{1}{\pi^2} \sum \frac{(e, A)^2 I'_A}{I_A^2},$$

$$M = I'_e \sum \frac{I_A}{I'_A} + \frac{1}{\pi'^2} \sum \frac{(e, A)^2 I_A}{I'^2_A},$$

de sorte que, si l'on désigne par φ_1, φ_2, φ_3 les paramètres des trois surfaces inscrites à la développable (SS') qui passent par le point e,

$$\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = \frac{\pi'^4}{\pi^4} \frac{I_e}{I'_e}.$$

Par conséquent, *si l'on inscrit à la développable* (SS') *trois surfaces, le rapport* $\frac{I_e}{I'_e}$ *des indices d'un des points d'intersection de ces dernières par rapport aux surfaces* S *et* S' *est constant pour les huit points d'intersection.*

On peut dire encore, d'après (158) : *Lorsque cinq surfaces sont inscrites à la même développable, les huit points d'intersection de trois d'entre elles et la courbe d'intersection des deux autres appartiennent à une même surface.*

De ce théorème on peut déduire plusieurs corollaires :

1° Si l'on prend pour l'une des surfaces une face du tétraèdre autopolaire, on voit que, *lorsque quatre surfaces sont inscrites à la même développable par les*

points d'intersection de trois d'entre elles, on peut mener quatre surfaces circonscrites à la quatrième : les plans de contact coïncident avec les faces du tétraèdre autopolaire aux surfaces données.

2° Si deux des surfaces coïncident avec deux des faces du tétraèdre autopolaire, *trois surfaces étant inscrites à la même développable, par l'intersection de deux d'entre elles, on peut mener six surfaces ayant un double contact avec la troisième : les cordes de contact sont les arêtes du tétraèdre autopolaire aux surfaces données.*

3° Si trois surfaces coïncident avec trois des faces du tétraèdre autopolaire, on en conclut que, *deux surfaces étant données, les sommets des cônes que l'on peut mener par leur intersection sont les sommets du tétraèdre autopolaire aux surfaces données.*

4° Lorsque deux des surfaces coïncident avec deux des faces du tétraèdre autopolaire, on peut encore en conclure que, *quand trois surfaces sont inscrites à la même développable, leurs huit points d'intersection sont les sommets d'un hexaèdre dont les faces opposées et les plans diagonaux se coupent deux à deux suivant les arêtes du tétraèdre autopolaire,* d'où il résulte aussi que *les arêtes de cet hexaèdre vont se couper quatre à quatre aux sommets du tétraèdre.*

Interprétation géométrique des coefficients M *et* M'.

161. Dans l'équation (160), la somme des paramètres des surfaces inscrites à la développable (SS'), et qui passent au point e, est donnée par la relation

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{M}{I_e}.$$

Soient F, G, H les plans tangents menés à ces surfaces

par le point e,

$$\varphi_1 = \frac{I_F}{I'_F}, \quad \varphi_2 = \frac{I_G}{I'_G}, \quad \varphi_3 = \frac{I_H}{I'_H},$$

de sorte que

$$\frac{I_F}{I'_F} + \frac{I_G}{I'_G} + \frac{I_H}{I'_H} = \frac{M}{I_e}.$$

Nous savons (153) que les trois plans F, G, H déterminent un trièdre conjugué à toutes les surfaces inscrites à la développable (SS′), et en particulier à la surface S′. Or il résulte de la relation (c, 68) que, si par un point fixe e on mène trois plans F, G, H conjugués à la surface S′, la somme $\frac{I_F}{I'_F} + \frac{I_G}{I'_G} + \frac{I_H}{I'_H}$ conserve une valeur constante, quels que soient ces trois plans; donc, *lorsque cette somme sera nulle, on pourra par le point e mener trois plans tangents à* S, *qui seront conjugués à* S′.

Désignons par ε, φ, ψ les arêtes du trièdre FGH, la relation précédente pourra s'écrire

$$\frac{I'_\varepsilon}{I_\varepsilon} + \frac{I'_\varphi}{I_\varphi} + \frac{I'_\psi}{I_\psi} = \frac{\pi^2}{\pi'^2}\frac{M}{I_e};$$

car, si ε est l'arête opposée à la face F de ce tétraèdre, on a (85, 5°)

$$I_\varepsilon I_F = -\frac{I_e \overline{\sin \varepsilon F}^2}{\pi^2}, \quad I'_\varepsilon I'_F = -\frac{I'_e \overline{\sin \varepsilon F}^2}{\pi'^2},$$

et l'on a deux autres relations analogues. D'après le n° 69, si par un point fixe e on mène trois axes ε, φ, ψ conjugués à S, la somme $\frac{I'_\varepsilon}{I_\varepsilon} + \frac{I'_\varphi}{I_\varphi} + \frac{I'_\psi}{I_\psi}$ est constante quels que soient les trois axes. *Si donc cette somme est nulle, on pourra par le point e mener trois tangentes à* S′ *qui seront conjuguées à* S.

Remarquons que $o = \sum \frac{(e, A)^2 I_A}{I'^2_A}$ est l'équation par

points de la polaire réciproque de S par rapport à S′ (113); or, l'équation M = o étant satisfaite en posant

$$I'_e = o, \quad o = \sum \frac{(e, A)^2 I_A}{I'^2_A},$$

nous voyons que la surface M passe par la courbe de contact de S′ avec la développable (SS′). La surface M′ passe aussi par la courbe de contact de cette développable avec S.

Si l'on observe que $-\pi'^2 I'_e = \sum \frac{(e, A)^2}{I'_A}$, on pourra écrire M sous la forme

$$-\pi'^2 M = \sum \frac{(e, A)^2}{I'_A} \left(\frac{I_B}{I'_B} + \frac{I_C}{I'_C} + \frac{I_D}{I'_D} \right);$$

on aurait de même

$$-\pi^2 M' = \sum \frac{(e, A)^2}{I_A} \left(\frac{I'_B}{I_B} + \frac{I'_C}{I_C} + \frac{I'_D}{I_D} \right).$$

Ces divers résultats donnent ce théorème : *Deux surfaces* S *et* S′ *étant données, si du point e on peut mener trois plans tangents à* S *déterminant un trièdre conjugué à* S′, *on pourra aussi de ce point mener trois tangentes à* S′ *déterminant un trièdre conjugué à* S. *Le lieu du point e qui satisfait à cette condition est une surface* M *conjuguée au tétraèdre autopolaire des surfaces* S *et* S′, *et qui passe par la courbe de contact de* S′ *avec la développable circonscrite aux surfaces* S *et* S′.

Remarque. — Lorsque $\sum \frac{I_A}{I'_A} = o$, la surface M coïncide avec la polaire réciproque de S par rapport à S′.

D'après la relation (*c*) du n° 68, la condition $\sum \frac{I_A}{I'_A} = o$ signifie que la surface S est inscrite à un tétraèdre conjugué à la surface S′. On a donc ce théo-

rème : *On donne deux surfaces* S *et* S′ *telles que la première* S *soit inscrite à un tétraèdre conjugué à* S′, *et l'on prend la polaire réciproque* M *de* S *par rapport à* S′; *d'un point quelconque e de cette polaire on peut mener trois plans tangents à* S *déterminant un trièdre conjugué à* S′, *et par ce même point on peut mener trois tangentes à* S′ *déterminant un trièdre conjugué à* S.

Ce théorème a plusieurs corollaires. Par exemple, si S est un paraboloïde, nous voyons que, *quand un paraboloïde* S *est inscrit à un tétraèdre conjugué à une surface* S′, *par le centre de* S′, *on pourra mener à* S *trois plans tangents qui seront conjugués à* S′, *et à* S′ *trois tangentes déterminant un trièdre conjugué à* S.

Propriétés de cinq surfaces passant par les mêmes points.

162. Lorsque le plan E′ coïncide avec le plan E, la relation (3′) du n° 148 devient

$$o = I_E - m'\varphi + m\varphi^2 - I'_E\varphi^3,$$

en posant

$$m = I'_E \sum \frac{I_a}{I'_a} + \frac{1}{\pi'^2} \sum \frac{(a, E)^2 I_a}{I'^2},$$

$$m' = I_E \sum \frac{I'_a}{I_a} + \frac{1}{\pi^2} \sum \frac{(a, E)^2 I'_a}{I_a^2},$$

de sorte que, si l'on désigne par φ_1, φ_2, φ_3 les paramètres des trois surfaces du système qui touchent le plan E,

$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3 = \frac{I_E}{I'_E}.$$

Par conséquent : *si par l'intersection des deux surfaces* S *et* S′ *on trace trois surfaces, le rapport* $\frac{I_E}{I'_E}$ *des*

indices d'un plan E *tangent à ces trois surfaces, par rapport à* S, *et* S' *aura la même valeur pour les huit plans tangents.*

On peut dire encore, d'après (156) : *Lorsque cinq surfaces ont les mêmes points d'intersection, les huit plans tangents communs à trois d'entre elles et la développable circonscrite aux deux autres touchent une même surface.*

De ce théorème il sera aisé de déduire les propositions corrélatives de celles du n° 160.

Interprétation géométrique des coefficients m et m'.

163. La somme des paramètres des surfaces qui passent par l'intersection SS' et qui touchent le plan E est donnée (162) par la relation

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{m}{I'_E}.$$

Soient f, g, h les points de contact de ces trois surfaces avec le plan E, nous avons

$$\varphi_1 = \frac{I_f}{I'_f}, \quad \varphi_2 = \frac{I_g}{I'_g}, \quad \varphi_3 = \frac{I_h}{I'_h}.$$

de sorte que

$$\frac{I_f}{I'_f} + \frac{I_g}{I'_g} + \frac{I_h}{I'_h} = \frac{m}{I'_E}.$$

Nous savons (154) que les trois points f, g, h déterminent un triangle conjugué à toutes les surfaces menées par l'intersection SS' et en particulier à la surface S'. Or il résulte de la relation (68, b) que, si dans un plan fixe E on prend trois points f, g, h conjugués à la surface S', la somme

$$\frac{I_f}{I'_f} + \frac{I_g}{I'_g} + \frac{I_h}{I'_h}$$

est constante, quels que soient ces trois points; donc, *lorsque cette somme sera nulle, on pourra, sur l'intersection de la surface* S *par le plan* E, *prendre trois points* f, g, h *déterminant un triangle conjugué à* S'.

Désignons par ε, φ, ψ les côtés du triangle fgh, la relation précédente pourra s'écrire

$$\frac{I'_\varepsilon}{I_\varepsilon} + \frac{I'_\varphi}{I_\varphi} + \frac{I'_\psi}{I_\psi} = \frac{m}{I_E},$$

car, si ε est le côté opposé au sommet f de ce triangle, on a (85, 2°)

$$I_f I_\varepsilon = (f, \varepsilon)^2 I_E, \quad I'_f I'_\varepsilon = (f, \varepsilon)^2 I'_E,$$

et l'on a deux autres relations analogues. D'après le n° 69, si dans un plan fixe E on trace un triangle $\varepsilon\varphi\psi$ conjugué à S, la somme

$$\frac{I'_\varepsilon}{I_\varepsilon} + \frac{I'_\varphi}{I_\varphi} + \frac{I'_\psi}{I_\psi}$$

est constante, quels que soient les côtés de ce triangle. *Si donc cette somme est nulle, on pourra, dans le plan* E, *circonscrire à* S' *un triangle conjugué à* S.

Remarquons que $o = \sum \frac{(a, E)^2 I_a}{I'^2_a}$ est l'équation par plans de la polaire réciproque de S par rapport à S' (113); or, l'équation $m = o$ étant satisfaite en posant

$$I'_E = o, \quad \sum \frac{(a, E)^2 I_a}{I'^2_a},$$

nous voyons que la surface m touche les plans tangents communs à cette polaire et à la surface S'; il suit de là que la surface m touche tous les plans tangents de S' menés aux points d'intersection des surfaces S et S'.

Si l'on observe que

$$-\pi'^2 I'_E = \sum \frac{(a, E)^2}{I'_a},$$

on pourra écrire m sous la forme

$$-m.\pi'^2 = \sum \frac{(a, E)^2}{I'_a}\left(\frac{I_b}{I'_b}+\frac{I_c}{I'_c}+\frac{I_d}{I'_d}\right).$$

Ces divers résultats donnent ce théorème : *Deux surfaces* S *et* S′ *étant données, si dans un plan* E *on peut inscrire à* S *un triangle conjugué à* S′, *on pourra aussi dans ce même plan circonscrire à* S′ *un triangle conjugué à* S. *Les plans qui satisfont à cette condition enveloppent une surface m conjuguée au tétraèdre autopolaire des surfaces* S *et* S′, *et qui touche les plans tangents de* S′ *menés aux points d'intersection des surfaces* S *et* S′.

L'équation $m' = 0$ donne lieu à un théorème analogue.

Remarque. — Lorsque $\sum \frac{I_a}{I'_a} = 0$, la surface m coïncide avec la polaire réciproque de S par rapport à S′. D'après la relation (b) du n° 68, la condition $\sum \frac{I_a}{I'_a} = 0$ signifie que la surface S est circonscrite à un tétraèdre conjugué à S′. On a donc ce théorème : *On donne deux surfaces* S *et* S′ *telles, que la première* S *soit circonscrite à un tétraèdre conjugué à* S′, *et l'on prend la polaire réciproque m de* S *par rapport à* S′; *tout plan tangent à cette polaire coupe la surface* S *suivant une conique à laquelle on peut inscrire un triangle conjugué à* S′, *et il coupe* S′ *suivant une conique à laquelle on peut circonscrire un triangle conjugué à* S.

Propriétés de quatre surfaces inscrites à la même développable.

164. Lorsque la droite ε' coïncide avec ε, la rela-

tion $(2)'$ (144) devient

$$o = \frac{I_\varepsilon}{\pi^2} + \varphi \sum \frac{|\varepsilon, \nu|^2}{|\gamma, \nu|^2} \frac{I_C I'_D + I_D I'_C}{\overline{\sin}^2 CD} + \varphi^2 \frac{I'_\varepsilon}{\pi'^2},$$

de sorte que, si l'on désigne par φ_1 et par φ_2 les paramètres des deux surfaces du système qui touchent la droite ε,

$$\varphi_1 \varphi_2 = \frac{\pi'^2}{\pi^2} \frac{I_\varepsilon}{I'_\varepsilon};$$

d'où ce théorème : *Quatre surfaces étant inscrites à la même développable, si l'on mène une tangente commune* ε *à deux d'entre elles* Φ_1 *et* Φ_2, *le quotient* $\frac{I_\varepsilon}{I'_\varepsilon}$ *des indices de cette droite par rapport aux deux autres* S *et* S' *est constant, quelle que soit cette tangente.*

En remplaçant les indices par leurs valeurs, nous obtiendrons des énoncés différents de ce théorème.

(a) Si l'on désigne par a et b, a' et b' les points d'intersection de la droite ε avec les surfaces S et S', par ε_0 et ε'_0 les demi-diamètres de ces surfaces parallèles à ε, on a (49)

$$I_\varepsilon = -\frac{\overline{ab}^2}{4\varepsilon_0^4}, \quad I'_\varepsilon = -\frac{\overline{a'b'}^2}{4\varepsilon'^4_0};$$

par conséquent, pour toute droite ε qui touche les deux surfaces,

$$\frac{ab}{\varepsilon_0^2} : \frac{a'b'}{\varepsilon'^2_0} = \text{const}.$$

(b) Si l'on mène les plans tangents aux points a et a' des surfaces S et S', et par les centres o et o' des parallèles op, $o'p'$ à la droite ε, lesquelles rencontrent en p et p' les plans tangents, on a (49)

$$I_\varepsilon = -\frac{1}{\overline{op}^2}, \quad I'_\varepsilon = -\frac{1}{\overline{o'p'}^2},$$

de sorte que

$$\frac{op}{o'p'} = \text{const.}$$

Par conséquent : *Quatre surfaces étant inscrites à la même développable, si l'on mène une tangente commune* ε *à deux d'entre elles, et que l'on désigne par* a *et* a' *l'un des points où cette droite rencontre les deux autres surfaces* S *et* S', *en menant les plans tangents en ces points, lesquels rencontrent en* p *et* p' *les diamètres des surfaces* S *et* S' *parallèles à* ε, *la droite* pp' *passera par un point fixe.*

(c) Par la tangente ε menons un plan tangent A à S, et soit a le point de contact ; par la même droite menons un plan tangent A' à S', et soit a' son point de contact. Si l'on désigne par A_0, A'_0 le produit des demi-axes des sections faites dans les deux surfaces par des plans diamétraux parallèles aux plans qui touchent respectivement ces surfaces, nous avons (50)

$$I_\varepsilon = \frac{(a,\varepsilon)^2}{A_0^2}, \quad I'_\varepsilon = \frac{(a',\varepsilon)^2}{A_0'^2},$$

de sorte que, pour toute tangente ε,

$$\frac{(a,\varepsilon)^2}{A_0^2} : \frac{(a',\varepsilon)^2}{A_0'^2} = \text{const.} = \lambda.$$

165. Désignons par γ la droite aa' qui joint les points de contact, on a

$$\frac{(a,\varepsilon)}{(a',\varepsilon)} = \frac{\sin\gamma A'}{\sin\gamma A},$$

et la relation ci-dessus devient

$$\left(\frac{A'_0 \sin\gamma A'}{A_0 \sin\gamma A}\right)^2 = \lambda.$$

Mais, d'après la dernière expression du n° 49, on a

$$I_\gamma = -\frac{\sin^2\gamma A}{(o, A)^2}, \quad I'_\gamma = -\frac{\overline{\sin}^2\gamma A'}{(o', A')^2};$$

d'où résulte, par l'élimination de $\sin\gamma A$ et $\sin\gamma A'$,

$$\lambda \frac{I_\gamma}{I'_\gamma} = \frac{(o', A')^2 A'^{2}_{2}}{(o, A)^2 A_0^2} = \frac{\pi'^2}{\pi^2}.$$

Cette égalité montre que le rapport des indices de la droite γ par rapport aux surfaces S et S′ est constant; d'où ce théorème : *Quatre surfaces étant inscrites à la même développable, si par une tangente commune* ε *à deux d'entre elles on mène des plans tangents aux deux autres* S *et* S′, *les droites qui joindront les points de contact de la surface* S *aux points de contact de la surface* S′ *toucheront deux surfaces inscrites à la même développable.*

Interprétation géométrique du coefficient L.

166. Désignons par G et H les plans tangents menés par la droite ε aux deux surfaces inscrites à la développable (SS′) qui touchent cette droite ε,

$$\varphi_1 = \frac{I_G}{I'_G}, \quad \varphi_2 = \frac{I_H}{I'_H}.$$

Nous aurons, en appelant L le coefficient de φ dans l'équation (164),

$$\frac{I_G}{I'_G} + \frac{I_H}{I'_H} = \frac{\pi'^2}{\pi^2} L, \quad \frac{I'_G}{I_G} + \frac{I'_H}{I_H} = \frac{\pi^2}{\pi'^2} L.$$

Nous savons (153) que les plans G et H sont conjugués à toutes les surfaces inscrites à la développable. Or il résulte du théorème (68, *c*) que, si par une droite fixe ε on mène deux plans G et H conjugués à S′, la

somme $\frac{I_G}{I'_G} + \frac{I_H}{I'_H}$ est constante, et que si ces plans sont conjugués à S, la somme $\frac{I'_G}{I_G} + \frac{I'_H}{I_H}$ est aussi constante, quels que soient les plans conjugués G et H. Il suit de là que, si ces sommes sont nulles, on pourra par la droite ε mener à S deux plans tangents qui seront conjugués à S′, et mener à S′ deux plans tangents qui seront conjugués à S. Ainsi *l'équation* L = o *représente le complexe des droites telles que les plans tangents menés par chacune d'elles aux surfaces* S *et* S′ *forment un faisceau harmonique.*

Les droites du complexe sont donc caractérisées par cette propriété; si par l'une d'elles on mène deux plans conjugués soit à S, soit à S′, la somme des paramètres des surfaces du système qui touchent ces plans est nulle. Par conséquent, pour avoir des droites du complexe, il suffira de construire les deux surfaces du système, de paramètres φ et $-\varphi$,

$$(\varphi)\quad \frac{(e,A)^2}{I_A+\varphi I'_A}+\frac{(e,B)^2}{I_B+\varphi I'_B}+\frac{(e,C)^2}{I_C+\varphi I'_C}+\frac{(e,D)^2}{I_D+\varphi I'_D}=o,$$

$$(-\varphi)\quad \frac{(e,A)^2}{I_A-\varphi I'_A}+\frac{(e,B)^2}{I_B-\varphi I'_B}+\frac{(e,C)^2}{I_C-\varphi I'_C}+\frac{(e,D)^2}{I_D-\varphi I'_D}=o$$

et de mener à ces surfaces des tangentes communes; en donnant à φ toutes les valeurs possibles, on aura toutes les droites du complexe.

En éliminant φ entre ces deux équations, on trouve que le lieu des intersections des deux surfaces (φ) et $(-\varphi)$ est donné par la surface du quatrième degré

$$M.M' = I_e I'_e.$$

Cette surface joue un rôle important dans l'étude de ce complexe; son équation peut se mettre sous ces deux

formes

$$o=\sum\frac{(e, A)^2}{I_A-\frac{M}{I'_e}I'_A},\quad o=\sum\frac{(e, A)^2}{\frac{M'}{I_e}I_A-I'_A}.$$

Il est aisé de le vérifier; mais on y est conduit par la considération suivante. Soit f un point de l'intersection des surfaces (φ) et ($-\varphi$); par ce point passe une troisième surface du système, et son paramètre φ' est déterminé (161) par la relation

$$\varphi-\varphi+\varphi'=\frac{M}{I'_f},$$

en écrivant, dans M, f au lieu de e. Ainsi cette troisième surface a pour équation

$$o=\sum\frac{(e, A)^2}{I_A-\frac{M}{I'_f}I'_A};$$

mais, puisque, en faisant varier le point f, on peut faire passer cette surface par tous les points d'intersection des surfaces (φ) et ($-\varphi$), il est évident qu'en remplaçant le point f par le point variable e on aura le lieu des points d'intersection de ces surfaces, c'est-à-dire la première des équations écrites plus haut. La seconde s'obtient d'une manière analogue, en observant que

$$\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi'}=\frac{M'}{I_f},$$

en remplaçant dans M′ le point e par le point f.

Lieu des droites du complexe situées dans un plan F.

Si l'on désigne par E et F deux plans quelconques

menés par la droite ε, on a

$$L \sin^2 EF = \sum \begin{vmatrix} (c, E) & (d, E) \\ (c, F) & (d, F) \end{vmatrix}^2 \frac{I_C I'_D + I_D I'_C}{(c, C)^2 (d, D)^2}.$$

Cette relation peut s'écrire sous la forme très-simple (152)

$$L \sin^2 EF = I_E I'_F + I_F I'_E - 2 I_{EF} I'_{EF}.$$

Or, si le plan F est un plan fixe,

$$I_E I'_F - I_F I'_E = 0$$

est l'équation de la surface inscrite à la développable (SS') $\left(\text{dont le paramètre } \varphi = \frac{I_F}{I'_F}\right)$ qui touche le plan F; par conséquent,

$$I_E I'_F + I_F I'_E = 0$$

est l'équation de la surface inscrite à cette même développable et dont le paramètre a pour valeur $-\frac{I_F}{I'_F}$ ou $-\varphi$. D'ailleurs les équations

$$I_{EF} = 0, \quad I'_{EF} = 0$$

représentent respectivement les pôles du plan F par rapport aux surfaces S et S'.

D'après cela, l'équation

$$L = 0 \quad \text{ou} \quad I_E I'_F + I_F I'_E + 2 I_{EF} I'_{EF} = 0$$

nous montre que, pour avoir les droites du complexe situées dans le plan F, on construira la surface $-\varphi$ du système dont le paramètre est égal et de signe contraire à celui de la surface du système qui touche le plan F; on prendra ensuite les pôles du plan F par rapport aux surfaces S et S', et l'on circonscrira à la surface $-\varphi$ des cônes ayant ces pôles pour sommets; ces cônes coupent

le plan F suivant une même conique qui touche toutes les droites du complexe situées dans le plan F.

167. Considérons trois surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3 inscrites à la développable (SS'). On peut, d'une infinité de manières, tracer des trièdres conjugués à S dont les faces A, B, C touchent respectivement les surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3. Prenons le plan polaire D du sommet de ces trièdres, par rapport à S; nous formons ainsi des tétraèdres ABCD conjugués à S, et nous savons qu'alors (68) $\sum \frac{I'_A}{I_A} = \text{const.}$ Or, si φ_1, φ_2, φ_3 sont les paramètres des surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3, on a

$$I_A - \varphi_1 I'_A = 0, \quad I_B - \varphi_2 I'_B = 0, \quad I_C - \varphi_3 I'_C = 0,$$

de sorte que, les trois premiers rapports qui figurent dans l'expression ci-dessus étant constants, le quatrième $\frac{I_D}{I'_D}$ est aussi constant, et par conséquent (156) le plan D enveloppe une surface Φ_4 inscrite à la développable (SS'). Nous connaissons huit plans qui touchent cette surface Φ_4; car, si l'on considère un point d'intersection *e* des surfaces Φ_1, Φ_2, Φ_3, les plans tangents de ces surfaces au point *e* forment (153) un trièdre conjugué à S; donc le plan polaire de ce point *e*, par rapport à S, touchera Φ_4. De là ce théorème :

Quatre surfaces S, Φ_1, Φ_2, Φ_3 *étant inscrites à la même développable, si les faces* A, B, C *d'un trièdre conjugué à* S *touchent respectivement les surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3, *le plan polaire du sommet de ce trièdre* (*par rapport à* S) *enveloppera une surface* Φ_4 *inscrite à la même développable et qui touchera les plans polaires* (*par rapport à* S) *des huit points d'intersection des surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3.

D'où le suivant :

Quatre surfaces S, Φ_1, Φ_2, Φ_3 *étant inscrites à la même développable, si les faces* A, B, C *d'un trièdre conjugué à* S *touchent respectivement les surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3, *le sommet de ce trièdre décrira une surface* Σ *du second degré, qui passera par les points d'intersection des surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3 *et par la courbe de contact de la surface* S *avec la développable.*

Cette surface Σ est d'ailleurs conjuguée au tétraèdre autopolaire des surfaces données.

Corollaires. — 1° *Lorsque quatre surfaces* S, Φ_1, Φ_2, Φ_3 *sont inscrites à la même développable, on peut faire passer une surface* Σ *par les points d'intersection de trois d'entre elles et la courbe de contact de la quatrième avec la développable.*

2° On prend pour S une conique. *Étant données trois surfaces* Φ_1, Φ_2, Φ_3 *et une conique* S *inscrites à la même développable, si l'on mène trois plans touchant respectivement ces surfaces, de manière que leurs traces sur le plan de la conique forment un triangle conjugué à cette conique, le point d'intersection de ces plans décrira une surface* Σ *qui passera par la conique* S *et les huit points d'intersection des surfaces données.*

Si, dans ce corollaire, on prend pour S le cercle imaginaire de l'infini, les surfaces sont homofocales, et nous voyons que *le lieu du sommet des trièdres trirectangles, dont les faces touchent respectivement trois homofocales données, est une sphère concentrique aux homofocales et qui passe par leurs huit points d'intersection.*

(*A suivre.*)

BIBLIOGRAPHIE.

QUESTIONS D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE; méthodes et solutions, avec un exposé des principales théories et un grand nombre d'exercices proposés, à l'usage des candidats aux écoles et des élèves des différentes classes de Mathématiques, particulièrement de la classe de Mathématiques élémentaires, par *A. Desboves*, agrégé et docteur ès sciences, professeur au lycée Fontanes. 2e édition, entièrement refondue et augmentée; in-8.

Il est sans doute inutile de prévenir le lecteur que, dans cette nouvelle édition comme dans celles des *Questions de Géométrie et de Trigonométrie*, le texte a été revu avec le plus grand soin, et que plusieurs démonstrations de théorèmes ou solutions de problèmes ont été simplifiées. J'appellerai seulement l'attention sur les questions nouvellement traitées.

On trouve d'abord (Ex. II, p. 231) un théorème nouveau sur le quadrilatère, démontré, d'une manière intuitive, à l'aide d'une identité qui n'avait pas encore été remarquée, du moins à ma connaissance.

Quelques théorèmes sur les évaluations de volumes par sommations sont ensuite démontrés (p. 254 et suivantes), d'une manière très-simple, en s'appuyant sur une proposition peut-être nouvelle (Th. II, p. 253). Parmi ces théorèmes, il faut signaler celui qui est relatif à l'évaluation de segments faits dans des ellipsoïdes, hyperboloïdes ou paraboloïdes de révolution (Ex. III, p. 255). J'avais été heureux de le trouver, parce qu'il me permettait de donner, comme exercices, les théorèmes d'Archimède sur les conoïdes, qui n'en sont que de simples corollaires. Mais je l'ai rencontré depuis dans l'introduction du Traité de Maclaurin sur les *fluxions*, et la désagréable déception d'avoir été devancé a été plus que compensée, pour moi, par la satisfaction d'avoir eu la même idée qu'un géomètre aussi distingué que Maclaurin.

On voudra bien encore remarquer (p. 325) une nouvelle démonstration, au moyen des imaginaires, de ce théorème : *Le produit de deux nombres, qui sont, chacun, la somme de quatre carrés, est lui-même la somme de quatre carrés.*

Mais la partie nouvelle la plus importante est une étude approfondie sur le triangle arithmétique de Pascal. J'ai d'abord donné les principales propriétés de ce triangle avec les dé-

monstrations de Pascal lui-même, mais en simplifiant l'exposition par l'emploi des notations modernes. J'ai ensuite montré comment, à l'aide du triangle de Pascal, on faisait, pour ainsi dire, descendre en Arithmétique certaines questions que l'on ne résout ordinairement qu'en faisant intervenir l'Algèbre supérieure, voire même les Calculs différentiel et intégral. Il m'a semblé qu'on ne pouvait faire connaître trop tôt aux élèves une ingénieuse invention, si *française* par son élégance et sa simplicité, comme le théorème de Sturm et la théorie des couples de Poinsot.

Ce n'est pas seulement Archimède et Pascal, mais aussi Descartes et Fermat que j'ai fait intervenir dans cette nouvelle édition.

Dans le Chapitre VII de la deuxième Partie, dont l'objet est la mise en équation des problèmes de Géométrie, et que j'aurais pu intituler, à la manière anglaise, *Descartes et Newton*, je prends pour guides ces deux géomètres. Le Chapitre est terminé par la solution d'un problème de Géométrie, telle que Descartes l'a indiquée dans deux lettres adressées à la princesse palatine Élisabeth.

Parmi les Exercices du Chapitre VI, on donne, d'après Descartes, la solution de cette question : *faire disparaître tous les radicaux d'une équation du second degré qui n'en contient que cinq :* déjà la même question avait été traitée (p. 80) par la méthode des multiplications successives, mais sans développer les calculs. Il est curieux de voir Descartes remarquer que cette dernière méthode est applicable, quel que soit le nombre des radicaux du second degré, lorsque, moins avancés que lui sur ce point, des auteurs de certains Traités d'Algèbre prétendent encore le contraire aujourd'hui.

Dans leur correspondance, Descartes, Frénicle et Fermat s'occupaient avec un vif intérêt des questions que ce dernier géomètre appelle *aliquotaires*, et que l'on a depuis laissées de côté, je ne sais pour quelle raison. On trouvera, parmi les Exercices du dernier Chapitre, un certain nombre de problèmes qui se rapportent à ce sujet, et qui rappelleront peut-être l'attention sur un genre de questions aujourd'hui oublié (*).

A. Desboves.

(*) J'ai eu l'occasion de relire récemment les œuvres mathématiques de Descartes, Fermat et Pascal, à propos de la composition d'un ouvrage actuellement sous presse, qui a pour titre : *Étude sur Pascal et les géomètres contemporains.*

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

(TOME XVI, 2e SÉRIE.)

Arithmétique.

Algèbre.

Trigonométrie.

Géométrie élémentaire.

Géométrie supérieure.

Géométrie à deux dimensions.

Géométrie à trois dimensions.

Mécanique.

Calcul différentiel et intégral.

Mélanges.

Correspondance.

Questions proposées.

Questions résolues.

TABLE DES NOMS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

(TOME XVI, 2e SÉRIE.)

Paris — Imprimerie de GAUTHIER-VILLARS, quai des Augustins, 55.



